

# ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

11. Band, Heft 9

UND IHRE GRENZGEBIETE

S. 385—432

## Geschichtliches.

**Kapp, A. G.:** Arabische Übersetzer und Kommentatoren Euklids, sowie deren math.-naturwiss. Werke auf Grund des Ta'rikh al-Hukamā' des Ibn al-Qifti. Isis 22, 150—172 (1934) u. 23, 54—99 (1935).

Diese Arbeit enthält wesentlich mehr, als der Titel angibt, nämlich ein umfangreiches Quellen- und Literaturverzeichnis zur gesamten arabischen Mathematik und Astronomie, begleitet von einer Reihe erklärender Noten. Eine Fortsetzung ist angekündigt.

O. Neugebauer (Kopenhagen).

**Proccisi, Angiolo:** Sui problemi di 3° grado. Period. Mat., IV. s. 15, 197—219 (1935).

**Ver Eecke, Paul:** Le traité des hosoèdres de Vito Caravelli. Mathesis 49, 59—62 (1935).

**Thomas, W. R.:** John Napier. Math. Gaz. 19, 192—205 (1935).

The main object of this article is to suggest that John Napier took the word "logarithm", though not the idea, directly from the Psammites (Arenarius, Sand-Reckoner) of Archimedes. Incidentally it will contain the results of new research into Napier's life, together with an examination of the history of some of the texts of the editio princeps of Archimedes (Basel, 1544) which exist at present in this country.

Autoreferat.

**Bieberbach, Ludwig:** Zweihundertfünfzig Jahre Differentialrechnung. Z. ges. Naturwiss. 1, 171—177 (1935).

Verf. erhebt die Frage nach dem Sein- und Geltungsgrund, den die Differentialrechnung in ihrer historischen Entwicklung jeweils besessen hat. Bei Leibniz wird die Grundlage gebildet von dem Begriff des Differentials (d. h. ein Verschwindendes, das im Verschwinden noch den Charakter des Verschwindenden bewahrt). Der Grenzbegriff ist ihm sowie Newton und Maclaurin zwar bekannt, wird aber nicht als Grundlage benutzt, weil in dem Übergang von der Reihenlehre zu den Funktionen Schwierigkeiten liegen; diese werden noch von Lagrange empfunden, der daher die Entwicklung in Potenzreihen als Ausgangspunkt wählt. Sein Verfahren ist unzureichend; er zeigt aber den Willen zum konstruktiv systematischen Aufbau, der z. B. bei Euler ganz fehlt. Auch bei d'Alembert vermißt man die klare einheitliche Auffassung. Im Anfang des 19. Jahrh. führt dann Cauchy, das Werk L'Huiliers fortsetzend, die Benutzung des Grenzbegriffs folgerichtig durch. Der vollkommene Aufbau auf diese Grundlage kann aber erst im letzten Viertel des Jahrh. nach Klärung des Zahlbegriffs auf Grund der Weierstraßschen Arbeiten gegeben werden; erst um die Jahrhundertwende wird er zum Allgemeingut der Mathematiker; in Beispielen kann gezeigt werden, wie langsam er sich durchgesetzt hat. Auch jetzt ist das Unendlichkleine noch nicht ganz verschwunden. Es wäre nicht möglich gewesen, die Leibnizsche Begründung zu neuem Leben zu erwecken; sie scheitert an der Entdeckung der ungleichmäßigen Konvergenz. Der Weierstraßsche Aufbau vereinigt das systematische konstruktive und kritische Element mit dem anschaulichen. Daneben habe die Grundlagenkrise ihr Gutes getan, indem sie die Augen geöffnet hat für den z. B. im Streit zwischen Intuitionismus und Formalismus zutage tretenden Zusammenhang des Geltungsgrundes mathematischer Wahrheiten mit weltanschaulichen Gesichtspunkten.

Dijksterhuis (Oisterwijk, Holland).

**Heegaard, Poul:** Ein Brief von Abel an Degen. Norsk mat. Tidsskr. 17, 33—38 (1935) [Norwegisch].

Der bisher unbekannte Brief ist datiert vom 2. III. 1824 und bedeutet einen merkwürdigen Beitrag zur Kenntnis der Entwicklung der wissenschaftlichen Tätig-



keit Abels. Abel behandelt die folgenden Punkte: 1. Er teilt mit, er habe eine Abhandlung über Integralrechnung fertig und möchte sie gerne gedruckt sehen; es bestehe dazu aber keine Möglichkeit (die Schrift ist nie herausgegeben worden und ist verloren gegangen). 2. Er gibt eine allgemeine Methode an zur Bestimmung der Form, die die Funktion  $\varphi$  in der Gl.  $\varphi(y) dy + \varphi(x) dx = 0$  haben muß, damit das vollständige Integral sich algebraisch ausdrücken lasse, und wendet diese Methode an auf eine bei Euler und Lagrange vorkommende Diff. Gl. 3. Ein Zufall habe ihn dazu geführt, eine Eigenschaft von allen transzendenten Funktionen der Form  $\int \varphi(z) dz$  ( $\varphi$  eine beliebige algebr. irrat. Funktion von  $z$ ) auszudrücken mittels einer endlichen Gl. in einer beliebigen Anzahl von Veränderl. 4. Er vermutet, daß Legendre eine mehr allgemeine Methode besitze, als er in seinen Publikationen zutage treten lasse und äußert sich mißbilligend über ein solches, die Entwicklung der Wissenschaft hemmendes Verfahren. 5. Er habe in seiner Abhandlung eine bisher vernachlässigte Eigenschaft der elliptischen Transzendenten hervorgehoben: Jede ell. Transz. besitze unendlich oft unendlich viele Werte, und zwar neben einem Werte  $p$  auch die Werte  $p \pm m \cdot a \pm n \cdot b$  ( $m, n$  ganze Zahlen;  $a$  und  $b$  konstante im allgemeinen imaginäre Größen mit nichtrationalem Verhältnis). 6. Er habe sich geübt in der Theorie der bestimmten Integrale und habe in seinem Streben nach Allgemeinheit eine Formel gefunden, die das Legendresche Theorem  $\frac{\pi}{2} = F'(c) \cdot E'(b) + F'(b) \cdot E'(c) - F'(c) \cdot F'(b)$  (jetzt geschrieben  $E'K' + E'K - KK' = \frac{\pi}{2}$ ) als sehr speziellen Fall in sich enthalte. *Dijksterhuis* (Oisterwijk, Holland).

**Gadamer, H. G.:** *Antike Atomtheorie.* Z. ges. Naturwiss. 1, 81—95 (1935).

Untersuchung der Stellung von Demokrits Atomismus gegenüber dem Platonischen und der modernen Naturwissenschaft. *O. Neugebauer* (Kopenhagen).

**Turner, A. Willard:** *Five great Greek astronomers (c. 408 B. C.—c. 165 A. D.).* J. Roy. Astron. Soc. Canada 29, 157—166 u. 203—208 (1935).

Kurze Skizze einiger markanter Züge der griechischen Astronomie. Behandelt werden Eudoxos, Heraclides P., Aristarch, Hipparch und Ptolemäus. *O. Neugebauer.*

**Somayajulu, D. Akku:** *The corrections of „variation“ and „evection“ in Hindu astronomy.* Math. Student 3, 12—19 (1935).

**Ludendorff, H.:** *Die astronomische Inschrift aus dem Tempel des Kreuzes in Palenque.* (Untersuchungen zur Astronomie der Maya, Nr. 9.) S.-B. preuß. Akad. Wiss. 1935, 301—330.

Diese Inschrift dürfte aus der ersten Hälfte des 5. Jahrhunderts n. Chr. stammen, denn ihr spätestes Tagesdatum entspricht dem Herbstäquinoktium des Jahres 430, und sie zeichnet sich besonders dadurch aus, daß sie eine größere Anzahl von sehr alten Daten enthält, die sich, wie wir sehen werden, über die Jahre 3379—1137 v. Chr. verteilen. Außer dieser „prähistorischen Datenreihe“, wie ich sie nennen will, enthält die Inschrift auch eine „historische Datenreihe“, die sich über die Jahre 162—430 n. Chr. erstreckt. Die astronomische Diskussion der Daten ergibt nun die Tatsache, daß ihnen ganz überwiegend Himmelserscheinungen bestimmter Art entsprechen, und zwar Konjunktionen der Planeten untereinander, Oppositionen und Konjunktionen des Saturn mit der Sonne und Konjunktionen des Merkur mit letzterer. Ferner entspricht sowohl das früheste Datum der prähistorischen wie das der historischen Reihe genau je einer in Zentralamerika sichtbaren totalen Mondfinsternis. Aber noch mehr: Man kann, wenigstens im großen ganzen, die Gedankengänge rekonstruieren, die den Verfasser der Inschrift geleitet haben. *Auszug.*

## Algebra und Zahlentheorie.

**Varopoulos, Th.:** *Über den Betrag und die Wurzeln von Polynomen.* Bull. Soc. Math. Grèce 16, Nr 1, 3—7 (1935) [Griechisch].



**Amenta, Domenico:** Interpretazione di una corrispondenza a più indici nella teoria degli eliminanti. Atti Accad. Peloritana Messina **36**, 29—35 (1934).

Legt man den Koeffizienten  $a_{ik}$  von  $N$  Multilinearformen  $\varphi_i(\lambda)$  in  $t$  homogenen Variablenreihen

$$\lambda_{\nu 0}, \lambda_{\nu 1}, \dots, \lambda_{\nu n_\nu} \quad (\nu = 1, 2, \dots, t)$$

die Bedingung auf, daß die  $N > \sum n_\nu$  Gleichungen

$$\varphi_i(\lambda) = 0 \quad (1)$$

eine gemeinsame Lösung haben sollen, so entsteht im  $N$ -fach projektiven Raum dieser Koeffizientensysteme  $a_{ik}$  eine Mannigfaltigkeit, deren Gradzahlen  $G(l_1, l_2, \dots, l_N)$ , soweit sie nicht Null sind, alle durch  $\frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_t)!}{n_1! n_2! \dots n_t!}$  gegeben sind. Setzt man die  $a_{ik}$  gleich homogenen Funktionen von  $x_0, x_1, \dots, x_r$  und stellt wieder die Bedingung der Lösbarkeit der Gleichungen (1), so entsteht im Raum des  $x$  eine Mannigfaltigkeit, dessen Grad ebenfalls berechnet wird. *van der Waerden* (Leipzig).

**Lipka, Stephan:** Über die Descartessche Zeichenregel. Acta Litt. Sci. Szeged **7**, 177—185 (1935).

Die Gleichung  $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = 0$  mit reellen Koeffizienten besitzt immer eine Tschirnhaus-transformierte  $F(y) = b_0 + b_1 y + \dots + b_n y^n = 0$  mit den folgenden Eigenschaften: 1. Die Gleichungen  $f(x) = 0$  und  $F(y) = 0$  haben gleich viele positive Wurzeln. 2. Die Koeffizientenfolge von  $F(y)$  weist so viele Zeichenwechsel auf, als die Anzahl ihrer positiven Wurzeln. Im Falle, daß sämtliche komplexe Wurzeln von  $f(x) = 0$  in einem genügend kleinen und in der Halbebene  $\Re(z) < 0$  genügend weit liegenden Kreise liegen, beweist Verf. die Genauigkeit der Descartesschen Zeichenregel. Durch Anwendung dieses Satzes gibt Verf. eine rationale Transformation an, welche den Bedingungen des ersten Satzes genügt. *Sz. Nagy*.

**Marden, Morris:** The location of the zeros of the derivative of a polynomial. Amer. Math. Monthly **42**, 277—286 (1935).

Ein Bericht über die Verteilung der Wurzeln der Ableitung eines Polynoms in der komplexen Zahlenebene. Der Verf. erwähnt und skizziert die Beweise folgender Sätze: Gauß-Lucascher Polygonsatz; Satz von Jensen über die Lage komplexer Wurzeln der Ableitung innerhalb der „Jensenschen Kreise“; Satz von Laguerre über Kreise durch die konjugierten Punkte  $z, \bar{z}$ ; Satz von Grace über Wurzeln von zwei mittels eines linearen Operators verbundenen Polynomen; Satz von Grace und Heawood: Ist  $f(1) = f(-1) = 0$ , so hat  $f'(t)$  eine Wurzel innerhalb  $|t| \leq \cotg \frac{\pi}{2n}$ ; Sätze von Bôcher und Walsh über Wurzeln von  $[f_0(z) f_1(z)]' = 0$  und Minkowskische „Mittelbereiche“; Satz von van den Berg über die Lage von Wurzeln der Ableitung in den Brennpunkten einer gewissen Kurve der Klasse  $p-1$ . — Die meisten dieser Sätze werden mechanisch bewiesen. — Es sind nicht erwähnt: eine Arbeit von M. Krein, Le système dérivé et les contours dérivés (Odessa 1926), sowie einige spätere Arbeiten von J. v. Nagy in J. reine angew. Math. *N. Tschebotarow*.

**Petterson, Erik L.:** Irreduzibilitätskriterien als Folgerung einiger Beziehungen zwischen den Faktorzerlegungen eines algebraischen Polynoms und seines konstanten Gliedes. Math. Z. **40**, 194—200 (1935).

Indem der Verf. das I. Schursche Prinzip (vgl. das nächstfolgende Ref.) mit den Kongruenzeigenschaften eines Polynoms kombiniert, erhält er einige neue Irreduzibilitätskriterien, z. B.: Es sei  $f(x) = x^m + p \cdot h(x) \cdot x + a$ ,  $|a| > 1$ ,  $-a$  gehört zum Exponenten  $v$  modulo  $p$ ,  $p$  ist eine Primzahl. Gilt für jeden echten Teiler  $d$  von  $a$   $d^{mv} \not\equiv 1 \pmod{p}$ , so ist  $f(x)$  dann und nur dann reduzibel, wenn es alg. Einheiten zu Wurzeln hat. *N. Tschebotarow* (Kasan).

**Brauer, Alfred, und Richard Brauer:** Über Irreduzibilitätskriterien von I. Schur und G. Pólya. Math. Z. **40**, 242—265 (1935).

Die Verff. bieten eine Fülle von neuen Irreduzibilitätskriterien, deren Idee von I. Schur [Arch. Math. u. Phys. (3) **13**, Aufgabe 226; (3) **15**, Aufgabe 275 (1908/09)]



und Pólya [Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 28, 31—40 (1919)] stammt. — Zunächst steht ein interessanter Hilfssatz: Nimmt ein ganzzahliges Polynom  $f(x)$  an  $u$  ganzzahligen Stellen  $a_v$  einen Primzahlpotenzwert  $\pm p^k$  an und treten beide Vorzeichen wirklich auf, so ist  $u \leq 3 + \sqrt{4k+1}$ . — Daraus fließen folgende Kriterien:  $f(x)$  vom Grade  $n$  ist entweder irreduzibel oder das Produkt zweier irreduzibler Polynome gleichen Grades, 1. falls  $a_\mu \not\equiv a_v \pmod{p}$  und  $u > \text{Max}\left(\frac{4}{5}n, \frac{n+7}{2}, \frac{2}{3}n+2\right)$ , 2. falls  $k=1$ ,  $u > \text{Max}\left(\frac{2}{3}n, \frac{n+7}{2}\right)$ , 3. falls  $f'(a_v) \not\equiv 0 \pmod{p}$ ,  $u > \text{Max}\left(\frac{2}{3}n, \frac{n+7}{2}\right)$  gilt. — Sind dagegen mindestens zwei  $a_v$  modulo  $p$  kongruent und ist entweder  $u > \text{Max}\left(\frac{n}{2}, 4\right)$  oder  $u > \frac{n}{2} + \frac{k^2+3k}{2} + 3$ ,  $p > 2^{k+2}$ , so ist  $f(x)$  irreduzibel. — Endlich gilt:  $f(x)$  zerfällt nicht in zwei Faktoren ungleichen Grades, falls  $u=n$ ,  $f(a_v) \mid p^k$  und  $n > 12k(2k^2+4k+1)$  ist. — Unter der Irreduzibilität wird stets Irreduzibilität im Körper der rationalen Zahlen verstanden.

N. Tschebotaröw (Kasan).

**Dorwart, H. L.: Irreducibility of polynomials.** Amer. Math. Monthly 42, 369 bis 381 (1935).

Die Arbeit enthält eine übersichtliche Zusammenstellung bekannter Irreduzibilitätskriterien, nach folgenden Gesichtspunkten geordnet: 1. Kriterien, die von den Teilbarkeitseigenschaften der Koeffizienten abhängen. 2. Kriterien, die auf Größenbeziehungen zwischen den Koeffizienten beruhen. 3. Kriterien, die mit den arithmetischen Eigenschaften der Werte zusammenhängen, die das Polynom für ganzzahlige Werte des Arguments annimmt.

Wegner (Darmstadt).

**Nagell, Trygve: Sur la réductibilité des trinomes.** (Stockholm, Sitzg. v. 14.—18. VIII. 1934.) 8. Skand. Mat.-Kongr., 272—275 (1935).

Verf. beweist folgendes Irreduzibilitätskriterium: Das Trinom  $f(x) = x^n + qx^p + r$  ( $1 \leq p \leq n-1$ ;  $p$  und  $r$  ganz rational) ist im Körper der rationalen Zahlen irreduzibel, falls folgende Bedingungen erfüllt sind: 1.  $|q| > 1 + |r|^{n-1}$ , 2.  $r$  ist niemals  $d$ -te Potenz einer natürlichen Zahl, wenn  $d$  ein Teiler  $> 1$  von  $n$  ist. Hierbei kann in 1 das  $>$ -Zeichen nicht durch  $\geq$  ersetzt werden. Ferner kann die Bedingung 2 nicht entbehrt werden, da es unendlich viele reduzible Trinome gibt, für die 1 erfüllt ist.

Wegner.

**Hull, Ralph: A determination of all cyclotomic quintic fields.** Ann. of Math., II. s. 36, 366—372 (1935).

Der Verf. stellt sich die Aufgabe, alle zyklischen Gleichungen fünften Grades explizite aufzustellen. Bekanntlich ist ein durch Wurzeln jeder solchen Gleichung gebildeter Körper Unterkörper des  $m$ -ten Kreiskörpers,  $m = q_1 q_2 \dots q_\mu$ , wobei  $q_i$  entweder 25 oder eine Primzahl vom Typ  $5h+1$  (das sind die kritischen Primzahlen unseres Körpers) ist. Alle verschiedenen Unterkörper 5-ten Grades dieses Kreiskörpers entsprechen den Untergruppen seiner (Abelschen) Galoisschen Gruppe vom Index 5. — Ist  $\eta$  eine einer solchen Untergruppe entsprechende Gaußsche Periode und setzt man  $\xi = 5\eta \mp 1$  bei  $m \not\equiv 0 \pmod{25}$  und geradem (bzw. ungeradem)  $m$  und  $\xi = 5\eta$  bei  $m \equiv 0 \pmod{25}$ , so ist  $\xi$  Wurzel der Gleichung  $t^5 - c_2 t^3 - c_3 t^2 - c_4 t - c_5 = 0$ , wobei

$$c_2 = 10m, \quad c_3 = 5xm, \quad c_4 = 5\left\{\frac{1}{4}(x^2 - 125w^2) - m\right\}m, \\ c_5 = \left\{\frac{1}{8}(x^3 - 625wyz) - xm\right\}m$$

ist, während  $(x, y, z, w)$  eine Lösung des Diophantischen Systems

$$x^2 + 25y^2 + 25z^2 + 125w^2 = 16, \quad y^2 + yz - z^2 = xw$$

bilden.

N. Tschebotaröw (Kasan).

**Whiteman, Albert: On the law of quadratic reciprocity.** Bull. Amer. Math. Soc. 41, 359—360 (1935).

Beweis des Reziprozitätsgesetzes der quadratischen Reste auf Grund einer bekannten Modifikation des Gaußschen Lemmas.

Bessel-Hagen (Bonn).



**Berwick, W. E. H.:** The classification of ideal numbers in a cubic field. Proc. London Math. Soc., II. s. 38, 217—240 (1934).

Bezeichnet  $(\theta)$  einen kubischen Körper mit positiver Diskriminante,  $n(j)$  die Norm eines Ideals  $j$  von  $(\theta)$ ,  $l(j)$  die kleinste natürliche Zahl, die in  $j$  enthalten ist. Ein Ideal  $j$  heißt halbreduziert, wenn sie keine ganze Zahl  $\mathfrak{S}$  enthält, für die gleichzeitig  $|\mathfrak{S}| < l(j)$ ,  $|\mathfrak{S}'| < l(j)$ ,  $|\mathfrak{S}''| < l(j)$ . Mittels des Minkowskischen Satzes über Linearformen erhält Verf. unmittelbar, daß die Anzahl halbreduzierter Ideale endlich ist. Ferner ordnet Verf. jedem Ideale ein System-Büschel (cluster) äquivalenter halbreduzierter Ideale zu und beweist, daß die Büschel äquivalenter Ideale gemeinsame Ideale haben. Tritt ein halbreduziertes Ideal  $j$  in allen Büscheln auf, die durch  $j$  gebildet werden, so heißt  $j$  reduziert. Jedes Büschel ermöglicht die Fundamenteinheiten zu berechnen, wie es auch Verf. an numerischen Beispielen zeigt. Ref. betont, daß diese Theorie der kubischen Körper enger mit der Theorie der kubischen Formen zusammenhängt als die übliche.

Lubelski (Warschau).

**Holzer, L.:** Takagische Klassenkörpertheorie, Hassesche Reziprozitätsformel und Fermatsche Vermutung. J. reine angew. Math. 173, 114—124 (1935).

Die Unmöglichkeit des 1. Falles der Fermatschen Gleichung in regulären Kreiskörpern wird aus dem Satz gefolgert: Gibt es im Körper der  $l$ -ten Einheitswurzeln  $k$  eine Einheit  $\varepsilon$ , welche der  $l$ -ten Potenz einer Zahl aus  $k \bmod l^{l-3}$  kongruent, aber nicht der  $l$ -ten Potenz einer Zahl aus  $k \bmod l^l$  kongruent ist, so ist der 1. Fall der Fermatschen Gleichung in  $k$  unmöglich. Mit Hilfe von Klassenkörperüberlegungen wird sodann bewiesen, daß es ein solches  $\varepsilon$  in jedem regulären Kreiskörper gibt. Verf. benützt ferner die Hassesche Reziprozitätsformel, um, ähnlich wie die Furtwänglerschen Kriterien abgeleitet werden (s. Hasse, Bericht 2, 120—122), noch andere Kriterien abzuleiten: Ist  $x^l + y^l + z^l = 0$  mit ganzen rationalen, zu  $l$  primen, zueinander paarweise teilerfremden  $x, y, z$ , so gilt: Ist  $xy - z^2 \not\equiv 0 \pmod{l}$ , so erfüllt jeder Primteiler  $r$  dieser Zahl die Kongruenz  $r^{l-1} \equiv 1 \pmod{l^2}$ ; ist sowohl  $x - y$  als auch  $xy + z^2$  durch  $l$  nicht teilbar, so erfüllt jeder Primteiler  $r$  der letzteren Zahl die Kongruenz  $r^{l-1} \equiv 1 \pmod{l^2}$ . — Schließlich wird der 1. Fall der Fermatschen Gleichung in quadratischen Körpern betrachtet und dabei Sätze analog zu den von Wieferich und Legendre und Sophie Germain gefunden. Beweismittel ist wieder die Hassesche Reziprozitätsformel.

Taussky (Cambridge, England).

**Zorn, Max:** The automorphisms of Cayley's non-associative algebra. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 21, 355—358 (1935).

Verf. gibt eine Vektoralgebra  $V$  vom Rang 7 an, aus der sich das Cayleysystem mit reellem Koeffizientenkörper in analoger Weise ableiten läßt wie das Quaternionensystem aus der Vektoralgebra des  $R_3$ . Als „Cayleybasis“ wird eine Basis von  $V$  bezeichnet, deren 7 Elemente  $i_v$  skalar orthogonal sind und für deren Vektorprodukte  $i_v \times i_{v+1} = i_{v+3}$  gilt (die Indizes sind mod. 7 zu nehmen). Zu jedem Automorphismus  $\sigma$  von  $V$  gibt es eine Cayleybasis  $i_v$ , so daß  $\sigma(i_1) = i_1$  ist, die Ebenen  $(i_2, i_4)$ ,  $(i_3, i_7)$ ,  $(i_5, i_6)$  invariant sind und Drehungen um Winkel  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  mit  $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \equiv 0 \pmod{2\pi}$  erfahren. Diese Ergebnisse werden auf die Automorphismen des Cayleysystems angewendet, es wird untersucht, wann die Transformationen  $a^{-1}xa, b^{-1}(a^{-1}xa)b$  usf. Automorphismen liefern und in welcher Weise umgekehrt die Automorphismen durch solche Transformationen erzeugt werden können. Ohne Beweise.

Köthe.

**Albert, A. Adrian:** On the construction of Riemann matrices. II. Ann. of Math., II. s. 36, 376—394 (1935).

Dieser zweite Teil beschäftigt sich im Anschluß an den ersten (vgl. dies. Zbl. 10, 3) mit den Existenzbedingungen reiner Riemannscher Matrizen erster und zweiter Art von gegebenem Geschlecht  $p$  zu einer gegebenen Divisionsalgebra  $D$  über einem reellen algebraischen Zahlkörper  $F$ . Die erste oder zweite Art liegt vor, je nachdem das Zentrum von  $D$  eine relativ-total-reelle Erweiterung  $K$  von  $F$  oder eine relativ-imaginär-quadratische Erweiterung  $H$  einer solchen  $K$  ist. Für die erste Art existieren drei



Typen, je nachdem 1.  $D = K$ , 2. Grad  $D/K = 2$  und Sing.Ind.  $D/K = 3$ , 3. Grad  $D/K = 2$  und Sing.Ind.  $D/K = 1$  ist; dabei ist der Singularitätsindex der Rang über  $K$  der beim involutorischen Antiautomorphismus von  $D$  invarianten Elemente. Als Existenzbedingungen für diese drei Typen ergeben sich: 1.  $t|p$ , 2.  $D = (\xi, \eta)$  mit total-positiven  $\xi, \eta$  aus  $K$  und  $2t|p$ , 3.  $D = (\xi, \eta)$  mit total-negativen  $\xi, \eta$  aus  $K$  und  $2t|p$  echt; dabei ist  $t = \text{Grad } K/F$ . Für die zweite Art ergeben sich ähnliche Bedingungen.

H. Hasse (Göttingen).

**Kárteszi, Ferenc: Nuova dimostrazione di una congruenza aritmetica.** Boll. Un. Mat. Ital. 14, 173—174 (1935).

Wird

$$N(k, n) = k^n - \sum_i \frac{n}{k^{p_i}} + \sum_{j, h} \frac{n}{k^{p_j p_h}} - \dots + (-1)^r \cdot \frac{n}{k^{p_1 p_2 \dots p_r}}$$

gesetzt, wo  $p_1, p_2, \dots, p_r$  die von 1 verschiedenen Primfaktoren einer ganzen Zahl  $n \geq 2$  bezeichnen und  $k$  eine beliebige natürliche Zahl ist, so wird  $N(k, n) \equiv 0 \pmod{n}$ . Für diese schon früher in geometrischem Zusammenhang bemerkte Kongruenz (s. dies. Zbl. 11 222) wird ein neuer, auf dem Fermatschen Satze beruhender Beweis angegeben.

E. A. Weiss (Bonn).

**Niewiadomski, Roman: Résolution de l'équation indéterminée  $x^4 + y^4 + z^4 = 2A^2$ .** Wiadom. mat. 39, 127—133 (1935) [Polnisch].

**Dickman, K.: Über die Maximalzahl konsekutiver Summanden einer ganzen Zahl.** (Stockholm, Sitzg. v. 14.—18. VIII. 1934.) 8. Skand. Mat.-Kongr., 385—388 (1935) [Schwedisch].

Wenn  $k$  als Summe von  $n$ , aber nicht von mehr als  $n$  aufeinanderfolgenden positiven Zahlen darstellbar ist und wenn nicht  $n^2 \leq 2k \leq n^3$  gilt, so ist  $2k = nP$  mit  $P > n$ ; dabei bezeichnet  $P$  bei geradem  $n$  eine Primzahl, bei ungeradem  $n$  eine Zweierpotenz.

W. Feller (Stockholm).

**Romanoff, N.: Zum Goldbachschen Problem.** Mitt. Forsch.-Inst. Math. u. Mech. Univ. Tomsk 1, 34—38 u. dtsch. Zusammenfassung 38 (1935) [Russisch].

Mittels der Schnirelmannschen Methoden beweist Verf., daß man die Abschätzung der Schnirelmannschen Weltkonstante  $C$  von  $C \leq 2 \cdot 400000$  auf  $C \leq 2 \cdot 1104$  herabsetzen kann. Störende Druckfehler: S. 35 (von oben) Zeile 1 und 17: statt  $\varphi(u, x)$  lies  $\psi(u, x)$ ; 3: statt  $n_i + n_i$  lies  $n_i + n_j$ ; 10: statt  $n$  lies  $n_e$ ; 14: statt  $n$  lies  $u$ ; 26: statt  $n_i \leq n_j$  lies  $n_i + n_j$ ; 27: statt die Zahl lies die Zahl  $v(2x)$ ; 28: statt  $\psi(2, x) \cdot \psi(3, x) \dots \psi(2x, x)$  lies  $\psi(2, x), \psi(3, x), \dots, \psi(2x, x)$ . S. 36 Zeile 5 von oben: statt  $nk$  lies  $n_k$ . Seite 37 Zeile 3 von unten: statt  $1,37A \frac{x^2}{\lg^4 x}$  lies  $1,38A \frac{x^3}{\lg^4 x}$  und 1 von unten (ebenso S. 38, Zeile 1 von oben): statt 137 lies 138.

Lubelski (Warschau).

**Popov, A. I.: Über einige Ergebnisse von V. Brun.** C. R. Acad. Sci. URSS 2, 194 bis 196 u. dtsch. Zusammenfassung 196 (1935) [Russisch].

Verf. bietet eine sehr einfache Methode, mittels welcher er unter anderem eine Brunsche Formel beweist:

$$\begin{aligned} \pi(x) + \frac{1}{2} \pi(\sqrt{x}) + \frac{1}{3} \pi(\sqrt[3]{x}) + \dots = & - \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} + \binom{N}{1} \sum_1^x \tau_1(k) - \frac{1}{2} \binom{N}{2} \sum_1^x \tau_2(k) \\ & + \frac{1}{3} \binom{N}{3} \sum_1^x \tau_3(k) - \dots, \end{aligned}$$

wobei  $\pi(z)$  die Anzahl der Primzahlen im Intervall  $(2, z)$  bezeichnet,  $0 < N = [N] > [\lg_2 x]$

und  $\tau_\alpha(n)$  aus der Gleichung  $[\zeta(s)]^\alpha = \sum_{n=1}^x \frac{\tau_\alpha(n)}{n^s}$  entnommen ist. Verf. bemerkt, daß eine Tschebischeffsche Identität dasselbe leistet.

Lubelski (Warschau).



Potter, H. S. A., and E. C. Titchmarsh: The zeros of Epstein's zeta-functions. Proc. London Math. Soc., II. s. 39, 372—384 (1935).

Die mittels einer positiv definiten quadratischen Form  $\Phi(m, n) = am^2 + bmn + cn^2$  gebildete Zetafunktion  $Z_\Phi(s) = \sum'_{n, m} \Phi^{-s}$  hat mit der Riemannschen Zetafunktion  $\zeta(s) = \sum n^{-s}$  viele Eigenschaften gemeinsam, unter anderem erfüllt  $Z_\Phi(s)$  bekanntlich die Funktionalgleichung

$$\left(\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\right)^{-s} \Gamma(s) Z_\Phi(s) = \left(\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\right)^{-(1-s)} \Gamma(1-s) Z_\Phi(1-s), \quad \text{wo } \Delta = 4ac - b^2,$$

die auch von einer Summe von endlich vielen  $Z_{\Phi_v}(s)$  befriedigt wird, deren Formen  $\Phi_v$  die gleiche Diskriminante  $\Delta$  haben. Von diesem Typus sind die Zetafunktionen der imaginär-quadratischen Zahlkörper. Die Zetafunktionen der Zahlkörper allgemein haben nun mit  $\zeta(s)$  die für viele tiefere Untersuchungen wichtige Eigenschaft gemeinsam, eine Produktdarstellung  $\zeta(s) = \prod (1 - p^{-s})^{-1}$  bzw.  $Z(s) = \prod (1 - Np^{-s})^{-1}$  zuzulassen, was für beliebige  $Z_\Phi(s)$ , z. B.  $\sum' (n^2 + 5m^2)^{-s}$ , die Zetafunktion der Hauptklasse des Körpers  $k(\sqrt{-5})$  mit der Klassenzahl 2, nicht zutrifft. Die Verff. zeigen nun, daß der Hardysche Satz von der Existenz unendlich vieler Nullstellen von  $\zeta(s)$  mit dem Realteil  $\frac{1}{2}$  auf gewisse  $Z_\Phi(s)$ , nämlich solche, für die die Wurzel aus der Diskriminante  $4ac - b^2$  von  $\Phi$  zu  $a$  oder  $c$  in irrationalem Verhältnis steht, übertragen werden kann. Sie benutzen ein Beweisverfahren, das von Hardy und Littlewood für  $\zeta(s)$  angewendet wurde und das auf dem Landauschen Satze

$$\int_T^{T_1} t^\alpha \left(\frac{t}{e\xi}\right)^{it} dt = O(T_1^{\alpha+1}) \text{ unabhängig von } \xi$$

beruht. Der Beweisgedanke führt auch noch in einigen Fällen zum Ziel, wo  $a, b, c$  und  $\sqrt{4ac - b^2}$  rational sind. — Es ist nun interessant, daß die Verff. durch numerische Rechnungen, die nach den Worten der Verff. allerdings noch der Nachprüfung bedürfen, gezeigt haben, daß  $\sum' (n^2 + 5m^2)^{-s}$  Nullstellen  $s$  mit  $\Re s > \frac{1}{2}$  besitzt, was darauf hinzuweisen scheint, daß die Nullstellenverteilung der Zetafunktionen enger mit der Möglichkeit einer Eulerschen Produktdarstellung zusammenhängt. Zum Schluß wird die Formel für die Anzahl  $N(T)$  der Nullstellen  $s$  von  $Z_\Phi(s)$  mit  $0 < \Im s < T$  angegeben und bemerkt, daß auch der Bohr-Landausche Satz, daß fast alle Nullstellen von  $\zeta(s)$  in unendlicher Nähe der Geraden  $\Re s = \frac{1}{2}$  liegen, sich ohne Schwierigkeit auf  $Z_\Phi(s)$  übertragen läßt.

Deuring (Leipzig).

Suetuna, Zyoiti: Über die  $L$ -Funktionen in einem kubischen Körper. Proc. Imp. Acad. Jap. 11, 132—134 (1935).

$R$  sei der Körper der rationalen Zahlen,  $K/R$  sei ein galoisscher Körper mit der Gruppe  $\mathfrak{G}$ , der Zwischenkörper  $k$  gehöre zur Untergruppe  $\mathfrak{H}$ . Über seine  $L$ -Reihen hat Artin bewiesen:  $L(s, \chi^*; K/k) = L(s, \chi; K/k)$  ist gleichbedeutend mit  $\mathcal{E}_{\chi^*} = \mathcal{E}_{\chi}$ , wobei  $\mathcal{E}_{\chi}$  den von  $\chi$  induzierten Charakter von  $\mathfrak{G}$  bedeutet. Ist speziell  $k/R$  galoissch, so ist  $L(s, \chi^*) = L(s, \chi)$  mit  $\chi^*(h) = \chi(g h g^{-1})$  gleichbedeutend;  $g$  ist dabei ein passendes Element aus  $\mathfrak{G}$ . — Verf. untersucht nun auf dieser Grundlage das Bestehen von  $L(s, \chi^*) = L(s, \chi)$  für den Fall, wo  $k/R$  kubisch und nicht galoissch ist:  $k'$  sei der galoissche Oberkörper von  $k$  und gehöre zum Normalteiler  $\mathfrak{H}'$  von  $\mathfrak{G}$ ;  $\chi^0$  sei der Nichthauptcharakter von  $\mathfrak{H}/\mathfrak{H}'$ . Aus  $L(s, \chi^*) = L(s, \chi)$  folgt  $\chi^* = \chi^0 \chi^* = \chi_\psi^*$  und  $\chi = \chi^0 \chi = \chi_\psi$  und  $\psi^*(h') = \psi(g h' g^{-1})$ ; hiervon gilt auch die Umkehrung.

Ernst Witt (Göttingen).

Seale, R. Q.: A new proof of Minkowski's theorem on the product of two linear forms. Bull. Amer. Math. Soc. 41, 419—426 (1935).

Verf. beweist den Hilfssatz: „Ist  $e = \mp 1$ ,  $0 \leq a \leq 1$ ,  $0 \leq b \leq 1$ ,  $0 \leq c \leq 1$ , so ist mindestens eine der zwei Ungleichungen  $|a(ab - ec)| \leq 1$ ,  $|(2-a)((2-a)b + ec)| \leq 1$  erfüllt“, und mit seiner Hilfe den Minkowskischen Satz: „Sind  $\xi = \alpha x + \beta y$ ,  $\eta = \gamma x + \delta y$  zwei reelle Linearformen mit  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$  und  $\xi_0, \eta_0$  reelle Zahlen,



so gibt es ganze  $x, y$  mit  $|\xi - \xi_0| |\eta - \eta_0| \leq \frac{1}{4}$ . Zum Beweise des letzteren Satzes bestimmt man zwei ganze teilerfremde  $m, n$  mit  $\lambda = \alpha m + \beta n$ ,  $\mu = \gamma m + \delta n > 0$ ,  $|\lambda \mu| < 1$ , also  $\lambda \mu = e_1 b$ , wo  $e_1 = \mp 1$ ,  $0 \leq b < 1$ , weiter ein ganzes  $N$  und ein reelles  $k = \frac{e_2 c}{2}$  mit  $e_2 = \mp 1$ ,  $0 \leq c \leq 1$  und  $\mu \xi_0 - \lambda \eta_0 = N + k$ , endlich zwei ganze  $x, y$  mit  $nx - my = N$  und  $\gamma x + \delta y - \eta_0 = \frac{e_3 a \mu}{2}$ , wo  $e_3 = \mp 1$ ,  $0 \leq a \leq 1$ . Sei mit diesen  $x, y$  etwa  $\xi_1 = \alpha x + \beta y$ ,  $\eta_1 = \gamma x + \delta y$  und ferner  $\xi_2 = \xi_1 - e_3 \lambda$ ,  $\eta_2 = \eta_1 - e_3 \mu$ . Wegen

$$4 |\xi_1 - \xi_0| |\eta_1 - \eta_0| = |e_3 a (e_1 e_3 a b - e_2 c)|,$$

$$4 |\xi_2 - \xi_0| |\eta_2 - \eta_0| = |e_3 (2 - a) (e_1 e_3 (2 - a) b + e_2 c)|$$

folgt dann die Behauptung aus dem Hilfssatz.

Mahler (Groningen).

**Skolem, Th.: Ein Verfahren zur Behandlung gewisser exponentialer Gleichungen und diophantischer Gleichungen.** (Stockholm, Sitzg. v. 14.—18. VIII. 1934.) 8. Skand. Mat.-Kongr., 163—188 (1935).

Dieser Vortrag wiederholt die schon in einer früheren Arbeit (vgl. dies. Zbl. 8, 105) gegebenen Methoden und Sätze, bringt aber außerdem einige Verallgemeinerungen; z. B.: „Für die ganzen Zahlen  $u_0, u_1, \dots$  gelte die rekurrende Gleichung mit ganzen Koeffizienten  $\sum_{i=0}^n a_i u_{x+i} = 0$ , aber keine kürzere. Die Wurzeln der charakteristischen

Gleichung  $\sum_{i=0}^n a_i t^i = 0$  seien  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , und  $e$  sei der kleinste Exponent derart, daß alle  $\alpha_i^e \equiv$  derselben rationalen Zahl  $h$  modulo  $p$  werden. Ist  $\frac{\alpha_i}{\alpha_j}$  für  $i \neq j$  nie eine von 1

verschiedene  $e$ -te Einheitswurzel, so gilt die Gleichung  $\sum_{j=0}^m b_j u_{x+j} = 0$  mit ganzen  $b_j$  dann und nur dann für unendlich viele  $x$ , wenn das Polynom  $\sum_{j=0}^m b_j t^j$  durch  $\sum_{i=0}^n a_i t^i$  teilbar ist.“ (Dieser Satz ist teils enger, teils weiter als ein vom Ref. [s. dies. Zbl. 10, 390] mit der Skolemschen Methode gefundener Satz über die Koeffizienten rationaler Funktionen.) — In Verallgemeinerung eines früher nur für  $m = 2$  ausgesprochenen Satzes wird weiter gezeigt: „In den Reihen

$$F_r(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=0}^{\infty} p^i f_{ir}(x_1, \dots, x_m) \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

seien die  $f_{ir}$  Polynome mit ganzen  $p$ -adischen Koeffizienten; es gebe für  $s = 1, 2, \dots, m$  ganzzahlige Polynome  $h_{rs}(x_1, \dots, x_m)$ , so daß identisch

$$\sum_{r=1}^m f_{0r}(x_1, \dots, x_m) h_{rs}(x_1, \dots, x_m) \equiv h_s(x_s) \pmod{p} \quad (s = 1, 2, \dots, m)$$

mit allein von  $x_s$  abhängigem  $h_s$  ist, während nicht alle Koeffizienten von  $h_s$  durch  $p$  teilbar sind. Dann hat  $F_1 = F_2 = \dots = F_s = 0$  höchstens endlich viele Lösungen in ganzen rationalen (oder  $p$ -adischen) Zahlen.“ Dieser Satz dient dazu, neben einem Satz über  $u^4 - 5v^4 = 1$  ein allgemeines, aber kompliziertes Ergebnis über zwei exponentielle Gleichungen in zwei Unbekannten herzuleiten. Mahler (Groningen).

**Carlson, Fritz: Sur une propriété arithmétique de quelques fonctions entières.** Ark. Mat. Astron. Fys. 25 A, Nr 7, 1—13 (1935).

Verf. dehnt die Transzendenzeigenschaft von  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  für rationale  $x \neq 0$  auf

Funktionen aus, in denen an die Stelle von  $n!$  der Ausdruck  $Q(0)Q(1)\dots Q(n)$  tritt;  $Q(z)$  bezeichnet hier ein Polynom mit rationalen Koeffizienten, das für ganze  $z \geq 0$  nicht verschwindet. Er beweist: Sind die  $P_v(z)$  Polynome mit rationalen Koeffizienten, deren Grade kleiner sind als der von  $Q(z)$  und

$$f_v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_v(n)}{Q(0)Q(1)\dots Q(n)} x^n,$$



so ist die Summe  $\sum_{\nu=1}^h f_{\nu}(\alpha_{\nu})$ , wobei die  $\alpha_{\nu}$  voneinander und von Null verschieden sind, niemals Null, es sei denn alle  $f_{\nu}(x)$  sind identisch Null. *G. Szegő* (St. Louis, Mo.).

## Gruppentheorie.

● **Bouligand, Georges:** *Premières leçons sur la théorie générale des groupes et ses applications à l'arithmétique, à l'algèbre, à la géométrie.* Paris: Librairie Vuibert 1935. 241 S. Frs. 40.—.

Inhalt: Allgemeine Eigenschaften der Transformationsgruppen und Permutationsgruppen, Fundamentalbereiche von einigen diskontinuierlichen Gruppen, kontinuierliche Gruppen und ihre Anwendung auf Differentialgleichungen, Anwendungen der Gruppentheorie auf Zahlentheorie, Gleichungstheorie, Geometrie, Differential- und Integralinvarianten usw. — Das Werk will den Leser nur in die Gegenstände einführen. Auf schwierigere Theorien wird nur hingewiesen.

*van der Waerden* (Leipzig).

**Vakselj, Anton:** Eine neue Form der Gruppenpostulate und eine Erweiterung des Gruppenbegriffes. *Publ. Math. Univ. Belgrade* 3, 195—211 (1934).

Verf. gibt eine neue Verallgemeinerung des Gruppenbegriffs, die darin besteht, daß zwar jedes Element ein rechts- oder linksseitiges Einselement besitzt, aber verschiedene Elemente im allgemeinen verschiedene Einselemente besitzen — es gibt also kein Einselement in bezug auf alle Elemente — und zeigt, daß diese Verallgemeinerung eng mit Verallgemeinerungen von Suschkewitsch verbunden ist. *A. Kurosch.*

**Mollerup, Johannes:** Aufbau der metaacyclischen Gruppen mit acht Variablen. (*Stockholm, Sitzg. v. 14.—18. VIII. 1934.*) 8. Skand. Mat.-Kongr., 89—95 (1935).

Der Verf. bestimmt die transitiven, auflösbaren Permutationsgruppen in 8 Ziffern durch ein vereinfachtes Verfahren. *Zassenhaus* (Rostock).

**Kulakoff, A.:** Sur quelques théorèmes qui se rattachent à un problème de Burnside. *C. R. Acad. Sci., Paris* 200, 2141—2143 (1935).

Der Verf. vermutet, daß in einer einfachen, nicht zyklischen, endlichen Gruppe jedes Element, dessen Ordnung eine ungrade Primzahl ist, konjugiert zu wenigstens zweien unter seinen Potenzen ist. In der alternierenden Permutationsgruppe von mehr als 4 Ziffern ist die Vermutung richtig. Ref. bemerkt dasselbe für die anderen, aus Dickson (Linear Groups) bekannten, endlichen einfachen Gruppen. Aus der Richtigkeit jener Vermutung folgt sofort, daß eine einfache Gruppe mit ungrader Ordnung zyklisch ist. *Zassenhaus* (Rostock).

**Patterson, A. L.:** Tabulated data for the seventeen plane groups. *Z. Kristallogr. A* 90, 543—554 (1935).

Im Anschluß an die bekannte Darstellung von Wyckoff (The Analytical Expression of the Results of the Theory of Space Groups, 2nd edn., Washington 1930) werden die 17 ebenen Bewegungsgruppen ausführlicher beschrieben und mit Figuren illustriert. Die zugehörigen Fourierreihen werden angegeben und am Beispiel von  $\mathbb{C}_{2v}$  die Abstände von äquivalenten Punktlagen ausgerechnet. *J. J. Burckhardt.*

**Robinson, G. de B.:** On the geometry of the linear representations of the symmetric group. *Proc. London Math. Soc., II.* s. 38, 402—413 (1935).

Auf Grund der Darstellungstheorie von J. W. Young werden der symmetrischen und der verallgemeinerten Oktaedergruppe reguläre geometrische Konfigurationen zugeordnet und ihre Eigenschaften an Beispielen auseinandergesetzt. Die Arbeit schließt mit einem Ausblick auf die allgemeine lineare Gruppe. *J. J. Burckhardt.*

**Ulm, Helmut:** Zur Theorie der nicht-abzählbaren primären abelschen Gruppen. *Math. Z.* 40, 205—207 (1935).

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären abelschen Gruppen in zyklische direkte Summanden wurde von Prüfer [*Math. Z.* 17, 35—61 (1923)] gegeben. Diese Bedingung ist aber für nichtabzählbare primäre abelsche Gruppen schon nicht hinreichend, wie ein Beispiel von Prüfer (Diss. Berlin 1921) zeigt. Verf. gibt dazu ein neues einfacheres Beispiel. *A. Kurosch.*



**Kampen, E. R. van: Locally bicompact Abelian groups and their character groups.** Ann. of Math., II. s. 36, 448—463 (1935).

Eine Weiterführung der Pontrjaginschen Theorie der topologischen Abelschen Gruppen und ihrer Charakterengruppen; die Verallgemeinerung besteht erstens im Verzicht auf Metrik und Abzählbarkeitsvoraussetzungen, zweitens in der Lokalisierung der (Bi)kompaktheitsvoraussetzung. Auf diese Weise gelangt der Verf. zu einer sehr allgemeinen Theorie der im kleinen bikompakten Abelschen Gruppen in der Richtung der Pontrjaginschen Charakterentheorie. Nach einer kurzen Zusammenfassung der einschlägigen Begriffe der topologischen Gruppentheorie (ohne Voraussetzung der Kommutativität) im § 1 und einer Übersicht der Grundbegriffe der Pontrjaginschen Charakterentheorie im § 2, geht der Verf. im § 3 zur Erledigung des bikompakten Falles über. Nach einigen Hilfssätzen wird hier bewiesen: Dualitätssatz. Es existiert eine eindeutige Zuordnung zwischen den bikompakten und den diskreten Abelschen Gruppen, bei welcher jede Gruppe die Charakterengruppe der ihr entsprechenden Gruppe ist. Bei dieser Zuordnung entsprechen separable Gruppen einander. Auf dieses Resultat folgt eine Reihe speziellerer zum Teil an Pontrjagin anschließender Sätze. So z. B.: Eine bikompakte Gruppe ist dann und nur dann zusammenhängend, wenn ihre Charakterengruppe kein Element endlicher Ordnung enthält; sie ist dann und nur dann nulldimensional, wenn die Charakterengruppe aus lauter Elementen endlicher Ordnung besteht. Die Dimension der bikompakten Gruppe ist identisch mit dem Rang der Charakterengruppe usw. Für im kleinen bikompakte Gruppen wird im § 4 bewiesen: Jede solche Gruppe ist direkte Summe einer Translationsgruppe und einer zweiten Gruppe, die eine bikompakte Untergruppe mit diskreter Faktorgruppe enthält. Dabei gelten naheliegende Maximal- bzw. Eindeutigkeitsbedingungen. Der zweite Summand enthält alle bikompakten Untergruppen der gegebenen Gruppe. Und schließlich ein Dualitätssatz für im kleinen bikompakte Gruppen, der die Existenz einer eindeutigen Abbildung der Menge aller im kleinen bikompakten Gruppen auf sich behauptet, bei welcher jeder Gruppe ihre Charakterengruppe entspricht (die Charakterengruppe der Charakterengruppe einer Gruppe  $A$  ist also diese Gruppe  $A$ ). Die Charakterengruppe der gegebenen im kleinen bikompakten Gruppe wird mit Hilfe der obigen direkten Summenzerlegung topologisiert. Diese Charakterengruppe besitzt im übrigen eine analoge Summenzerlegung.

*P. Alexandroff* (Moskau).

**Toyoda, Kôshichi: On Casimir's theorem of semi-simple continuous groups.** Jap. J. Math. 12, 17—20 (1935).

Sind  $X_1, \dots, X_r$  die infinitesimalen Erzeugenden einer halbeinfachen kontinuierl. linearen Gruppe, ist weiter  $\varphi(S, T) = c_{i\sigma\sigma} c_{k\sigma\sigma} \lambda^i \mu^k = g_{ik} \lambda^i \lambda^k$  die Cartansche Bilinearform und  $(g^{ik})$  die inverse Matrix zu  $(g_{ik})$ , so ist die lineare Transformation  $G = g^{ik} X_i X_k$  nach Casimir mit allen  $X_k$  vertauschbar. Dieser Satz wird neu bewiesen.

*van der Waerden* (Leipzig).

## Analysis.

**Veress, P.: Ein elementarer Beweis der Stirlingschen Formel.** Mat. fiz. Lap. 42, 50—52 u. dtsh. Zusammenfassung 52—53 (1935) [Ungarisch].

Es sei  $f(x)$  stetig, abnehmend und konvex für  $x \geq 1$ ; dann besitzt

$$A_n = \frac{1}{2}f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) + \frac{1}{2}f(n) - \int_1^n f(x) dx$$

einen Grenzwert  $\Delta$  für  $n \rightarrow \infty$  und  $0 \leq \Delta - A_n \leq \frac{1}{2}(f(n) - f(n+1))$ . Für diese Ungleichung, die einen Teil der Eulerschen Summenformel bildet, wird ein hübscher geometrischer Beweis gegeben. (Daraus folgt allerdings nicht die volle Stirlingsche Formel; die Bestimmung der Konstante  $\frac{1}{2} \log(2\pi)$  erfordert eine besondere Betrachtung.)

*G. Szegő* (St. Louis, Mo.).



**Břečka, W.:** Sur les polynomes multiplement monotones qui s'écartent le moins de zéro. C. R. Acad. Sci., Paris **201**, 26—28 (1935).

L'auteur donne la solution asymptotique pour  $u \rightarrow \infty$  des deux problèmes suivants: trouver l'oscillation minima dans l'intervalle  $(-1, +1)$  du polynome

$$y_n(x) = \sigma_0 x^n + \sigma_1 x^{n-1} + \dots + \sigma_n$$

monotone d'ordre  $h+1$  ( $h$  fini) dans cet intervalle, 1° lorsque les coefficients  $\sigma_0, \dots, \sigma_l$  sont donnés ( $l$  fini); 2° lorsque ces coefficients sont liés par la relation  $\sum_{k=0}^l A_k \sigma_k = R$ ,

où les constantes  $A_k$  et  $R$  sont donnés. Comme l'indique l'auteur les formules correspondantes pour  $h=0$  avaient été données antérieurement par S. Bernstein et J. Geronimus.

S. Bernstein (Leningrad).

**Marcinkiewicz, J.:** Interpolating polynomials for absolutely continuous functions. Wiadom. mat. **39**, 85—125 (1935) [Polnisch].

The paper may be divided into two parts. In the first of them the author investigates the behaviour of the trigonometrical polynomials  $t_n(x) = T'_n(x)$ , where  $T_n(x) = T_n(x; F)$ ,  $0 \leq x \leq 2\pi$ , is the polynomial of order  $n$ , assuming the values  $F(x_i)$  at  $2n+1$  equidistant points  $x_i$ . The author shows that, if  $F(x)$  is absolutely continuous and of period  $2\pi$ , the behaviour of  $\{t_n(x)\}$  closely resembles that of the  $n$ -th partial sums of the Fourier series of the function  $f(x) = F'(x)$ . In particular, a number of tests for the convergence of the Fourier series of  $f$  remain valid for the polynomials  $t_n$ . Moreover, the author establishes the localization theorems for  $t_n$ , and proves the mean convergence of  $\{t_n(x)\}$ , to  $f(x)$ , if  $f \in L^p$ ,  $p > 1$  [an analogue of the well-known M. Riesz's theorem, Math. Z. **27**, 218—244 (1927)]. The second part of the paper is devoted to the study of the polynomials  $T_n(x; f)$  when  $f$  is a continuous function. It is shown that there is a continuous  $f$  such that  $T_n(x; f)$  diverges almost everywhere (the analogue for Fourier series is not known, and the problem seems to be exceedingly difficult). The situation remains the same even if the modulus of continuity  $\omega(\delta)$ , of  $f$ , is  $O(1/\log \delta^{-1})$ ; the polynomials  $T_n(x; f)$  are then uniformly bounded.

A. Zygmund (Wilno).

**Getchell, B. C.:** On the equivalence of two methods of defining Stieltjes integrals. Bull. Amer. Math. Soc. **41**, 413—418 (1935).

Die Definition eines bestimmten Integrals geschieht entweder, wie etwa beim Riemannschen Integral, indem die maximale Intervalllänge der approximierenden Zerlegungssumme gegen Null strebt. Oder das Integral ist als Grenzwert (wie etwa beim unteren Darboux'schen Integrale als obere Grenze) aller der Definition zugrunde liegenden Zerlegungssummen erklärt. Bekanntlich kann das Darboux'sche Integral auch auf die erste Art erklärt werden (Darboux'scher Satz). — Verf. gibt eine einfache, notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, daß die Definition der zweiten Art die der ersten ermöglicht. Er belegt dies an einigen Beispielen, die insbesondere die Definition des Stieltjesintegrals betreffen. (Vgl. G. Doetsch, dies. Zbl. **10**, 254.) Rogosinski.

**Geymonat, Ludovico:** Sul calcolo di alcuni importanti integrali semplici e doppi. Ist. Lombardo, Rend., II. s. **68**, 104—114 (1935).

Es handelt sich zunächst um das Doppelintegral  $\int \int e^{-P_2(x,y)} dx dy$ , wo  $P_2$  das quadratische Polynom  $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$ , das gleich 0 gesetzt eine Ellipse mit dem Mittelpunkt  $(\alpha, \beta)$  liefert, und  $\varphi$  eins der vier (unendlichen) Winkelfelder bedeutet, die die Geraden mit den Richtungskoeffizienten  $m$  und  $1/n$  durch  $(\alpha, \beta)$  bilden. Durch mehrfache Umrechnung auf andere Koordinaten ( $\xi = x - \alpha$ ,  $\eta = y - \beta$ ; ...) ergibt sich der Wert des Integrals zu  $e^{-K} \arccos \delta / \sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}$ ,

$$K = a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 + 2a_{13}\alpha + 2a_{23}\beta + a_{33}$$

$$\delta = \frac{(ma_{22} + a_{12})(a_{22} + na_{12}) + (na_{11}a_{22} - a_{12}^2)}{\pm \sqrt{m^2a_{22}^2 + 2ma_{12}a_{22} + a_{11}a_{22}} \sqrt{a_{22}^2 + 2na_{12}a_{22} + n^2a_{11}a_{22}}}$$



ist. [Der besondere Fall  $a_{13} = a_{23} = a_{33} = 0, m = n = 0$  ( $\varphi$  ein rechter Winkel) ist von Stieltjes, nach einem anderen Verfahren, in Bull. Sci. math. **13**, 170 (1889) behandelt worden.] Weiterhin wird die Übertragung auf den  $R_n$  behandelt, sodann werden in ähnlicher Art die Integrale:

$$\int_{\varphi} \int e^{-(a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2)^n} \{a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2\}^{\frac{m+n-2}{2}} d\xi d\eta \quad (m, n \text{ ganze Zahlen})$$

und 
$$\int_{\varphi} \int \sin(a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2) / (a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2) d\xi d\eta$$

bestimmt. Schließlich wird gezeigt, daß die für reelle Werte von  $a, b, c$  bekannte Formel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2 + bx + c)} dx = (\pi/a)^{1/2} e^{-c + b^2/4a}$$

auch für komplexe Werte von  $a, b, c$  gültig bleibt,

L. Schrutka (Wien).

**Marcouchevitch, A.:** Sur les dérivées de l'intégrale de Poisson. Rec. math. Moscou **41**, 659—667 u. franz. Zusammenfassung 668 (1935) [Russisch].

Let  $f^{(m)}(\alpha_0)$  be defined as  $a_m m!$  provided  $f(x)$  is measurable and

$$f(\alpha) = f(\alpha_0) + \dots + a_m (\alpha - \alpha_0)^m + \eta(\alpha) (\alpha - \alpha_0)^m \quad (*)$$

where  $\eta(\alpha) \rightarrow 0$  as  $\alpha \rightarrow \alpha_0$ . Let  $P(r, \theta) = (2\pi)^{-1} (1 - r^2) [1 + r^2 - 2r \cos \theta]^{-1}$  and

$$u(r, \theta) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) P(r, \alpha - \theta) d\alpha. \quad \text{Then, if } f^{(m)}(0) \text{ exists, the function } u(r, \theta) \rightarrow f^{(m)}(0)$$

along all non-tangential paths ending at  $r = 1, \theta = 0$ . This result can be generalized as follows. Let in (\*)  $\eta(\alpha) \rightarrow 0$  when  $\alpha \rightarrow \alpha_0$  remaining in a measurable set  $E$  for which  $\alpha_0$  is a limit point on both sides. We set  $k! a_k = f_E^{(k)}(\alpha_0)$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ . Let  $f(\alpha)$  be bounded in the neighborhood of  $\alpha = 0$  and let  $f_E^{(m)}(0)$ ,  $m \geq 1$ , exist, while

the set  $E$  is subject to the restriction  $(2\varepsilon)^{-m-1} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi_E(\alpha) d\alpha \rightarrow 0$  as  $\varepsilon \rightarrow 0$  where

in general  $\varphi_\varepsilon(\alpha)$  denotes the characteristic function of  $e$ . Then still  $u(r, \theta) \rightarrow f^{(m)}(0)$  as  $(r, \theta) \rightarrow (1, 0)$  along all non-tangential paths. The author shows that (in case  $m = 1$ ) the theorem fails even when  $(r, \theta) \rightarrow (1, 0)$  along the radius if we assume that

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} (2\varepsilon)^{-2} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi_E(\alpha) d\alpha > 0. \quad J. D. Tamarkin \text{ (Providence, R. I.)}$$

**Bernstein, Serge:** Sur quelques propriétés extrémales des intégrales successives. C. R. Acad. Sci., Paris **200**, 1900—1902 (1935).

Gesucht wird die beste Schranke  $M_n$  von  $|f(x)|$ ,  $0 \leq x \leq 2\pi$ , wenn  $f(x)$  die Bedingungen  $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$ ,  $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(2\pi)$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ),  $|f^{(n)}(x)| \leq 1$  erfüllt. Es ergibt sich

$$M_n = \frac{4}{\pi} \sum_{h=0}^{\infty} (2h+1)^{-n-1} \quad \text{bzw.} \quad \frac{4}{\pi} \sum_{h=0}^{\infty} (2h+1)^{-n-1} \sin(2h+1)\theta,$$

je nachdem  $n \equiv 1$  oder  $0 \pmod{2}$  ist. Hier bezeichnet  $\theta < \frac{\pi}{2}$  die positive Wurzel der Gleichung  $\sum_{h=1}^{\infty} h^{-n} \cosh h\theta = 0$ . Die  $M_n$  streben, wenn  $n \rightarrow \infty$ , gegen  $\frac{4}{\pi}$ , und zwar abnehmend für ungerade  $n$ , wachsend für gerade  $n$ . Der Spezialfall  $n = 1$ ,  $M_1 = \frac{\pi}{2}$  rührt von H. Bohr her [C. R. Acad. Sci., Paris **200**, 1276 (1935); dies. Zbl. **11**, 110]. Die  $M_n$  werden für ungerade  $n$  durch gewisse Polynome erreicht, welche in naher Beziehung zu einer vom Verf. früher (Congr. internat. Bologna **1928**, 274) eingeführten, durch eine andere Extremalforderung definierten Klasse von Polynomen stehen.

G. Szegő (St. Louis, Mo.).



**Young, Rosalind Cecily:** The asymptotic behaviour of  $F(z) = \int_{a-0}^{b+0} e^{zt} dg(t)$ . *Math. Z.* **40**, 292—311 (1935).

The above function  $F(z)$  is studied as an entire function of  $z$ . The author derives results concerning the distribution of zeros and of other values of  $F(z)$ , the growth of  $F(z)$ , the paths of determination of  $F(z)$  and the like. One of the main tools used consists in integrating by parts the integral representing  $F(z)$  thus reducing it to the type  $\int_a^b e^{zt} \varphi(t) dt$  exhaustively discussed by Titchmarsh. Another tool is a lemma due to Rajchmann and Verblunsky. This lemma is stated in a more general form (not necessary for the argument used) than that used by these authors, but the reviewer was not able to follow the sketch of proof given in text, the main difficulty being that the integral  $\int h(t) e^{i n \delta t} dg(t)$  need not exist if  $h(t)$  is merely measurable. The notation  $E(u)$  used on p. 307 also needs an explanation. *J. D. Tamarkin.*

**Owen, P. Macaulay:** The Riemannian theory of Hankel transforms. *Proc. London Math. Soc.*, II. s. **39**, 295—320 (1935).  $\infty$

Let  $\nu \geq -\frac{1}{2}$  and let (\*)  $f(x) = \int_0^\infty \sqrt{xy} J_\nu(xy) g(y) dy$  exist for all  $x > 0$  as a Cauchy integral at infinity. Then for almost all  $x$ ,  $g(x) = \int_0^\infty \sqrt{xy} J_\nu(xy) f(y) dy$  where the integral is a  $(C \cdot 1)$  integral, provided either  $g \in L$  over  $(0, \infty)$  or  $g \in L$  over  $(0, 1)$ ,  $g \in L$  over  $(1, \infty)$ , while  $x^{\nu+1/2} f(x) \in L$  over every finite range. It follows that a finite function  $f(x)$  cannot be represented for all  $x > 0$  by an integral of type (\*) where  $g$  satisfies the second set of the conditions above. The above conclusion is still true if there is a finite set of exceptional values of  $x$ , provided that  $g(y) \rightarrow 0$  as  $y \rightarrow \infty$ . An essential tool used in the proof is an extension of the notion of the second generalized derivative. *J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

**Heins, Albert E.:** Applications of the Fourier transform theorem. *J. Math. Physics*, Massachusetts Inst. Technol. **14**, 137—142 (1935).

The author finds Goursat's solution

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \frac{u(x', y', 0) dx' dy'}{\sqrt{c^2 t^2 - (x - x')^2 - (y - y')^2}} + \frac{\frac{\partial}{\partial t} u(x', y', 0) dx' dy'}{\sqrt{\quad}} \right] dx' dy'$$

of the equation  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  by way of putting

$$u(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(p, q, t) e^{i(xp + yq)} dp dq$$

and applying Fourier Transform theory. The reasoning, although interesting, is purely formal and anything but modern. E.g. the author does not hesitate to evaluate a transform of  $\cos \sqrt{p^2 + q^2} t$ , namely by the introduction of the convergence factor  $e^{-\epsilon \sqrt{p^2 + q^2}}$ , without considering the possibility of another convergence factor leading to another result. *Bochner* (Princeton).

**Hille, E., A. C. Offord and J. D. Tamarkin:** Some observations on the theory of Fourier transforms. *Bull. Amer. Math. Soc.* **41**, 427—436 (1935).

Es sei  $f(u)$  auf jedem endlichen Intervall integrierbar (keine Voraussetzung über das Verhalten im Unendlichen), so daß man für alle  $a > 0$  die Funktion  $f(x, a)$   $= (2\pi)^{-1/2} \int_{-a}^a f(u) e^{-ixu} du$  betrachten könne. — Falls für ein  $p > 1$ ,  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x, a)|^p dx \leq M^p$ , dann ist  $f(x, a)$  in  $L_p$  gegen eine Funktion  $F(x)$   $(C, 1)$ -konvergent, von der  $f(x)$  die Fourier-Transformierte ist. Aber auch  $F(x)$  ist eine Transformierte von  $f(x)$ , falls man



die folgende Definition zugrunde legt. — Falls  $F(u)$  auf jedem endlichen Intervalle integrierbar ist, so heiße  $F(u)$  eine Transformierte von  $f(x)$ , falls fur eine Folge  $a_n \rightarrow \infty$  und alle  $b > 0$  und alle  $x$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-b}^b f(u, a_n) e^{ixu} du = \int_{-b}^b F(u) e^{ixu} du.$$

Allgemein heiße  $\Phi(u)$  eine Transformierte erster Ordnung von  $f(x)$ , falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-b}^b f(u, a_n) e^{ixu} du = \int_{-b}^b e^{ixu} d\Phi(u).$$

Es wird gezeigt, daß letztere Transformierte allgemeiner ist als diejenige von Hahn-Wiener-Bochner, und daß, falls  $f(x) \subset L_p$  und  $p > 2$ ,  $\Phi(u)$  nur fur eine Funktionenmenge erster Kategorie absolut stetig ist. Bochner (Princeton).

**Hille, Einar: On Laplace integrals.** (*Stockholm, Sitzg. v. 14.—18. VIII. 1934.*) 8. Skand. Mat.-Kongr., 216—227 (1935).

The author gives, without proofs, an account of a theory of representation of functions  $f(z)$  by means of Laplace integrals  $\int_0^\infty e^{-zu} dA(u)$ , and of analytic continuation of such integrals. The method of continuation consists, roughly speaking, in the representation of a given function  $f(z)$  as the quotient  $L_1(z)/L_2(z)$  of two absolutely convergent Laplace integrals (see also Hille and Tamarkin, this Zbl. 9, 158). The problem of necessary and sufficient conditions for the existence of such representations, admits of a simple answer. By taking suitable  $L_2$ , we obtain methods which are closely related to the theory of M. Riesz's typical means. Corresponding result can be established for the integrals  $\int_{-\infty}^\infty e^{-zu} dA(u)$ . A. Zygmund (Wilno).

**Tricomi, Francesco: Sulla trasformazione di Laplace.** Period. Mat., IV. s. 15, 238 bis 250 (1935).

**Watanabe, Yoshikatsu: Über den Permanenzsatz Ces roscher, sowie H lderscher Limitierungsverfahren f r mehrfache Integrale. II.** T hoku Math. J. 40, 371—391 (1935).

Fortsetzung der Untersuchung gleichen Titels (I) des Verf. [T hoku Math. J. 38, 397—421 (1933); dies. Zbl. 8, 391]. Der Hauptsatz A der Note I, der dort nur f r gebrochene Ordnungszahlen  $k$  und  $l$  behandelt wurde, wird hier auch f r gebrochene Ordnungszahlen diskutiert. Die Voraussetzungen des Satzes werden etwas modifiziert und einige Ungenauigkeiten der Beweisf hrung in I berichtigt. *R. Schmidt.*

**Karamata, J.: ber einige Inversionss tze der Limitierungsverfahren.** Publ. Math. Univ. Belgrade 3, 153—160 (1934).

The author proves two Tauberian theorems connected with his former paper in Math. Z. 37, 582—588 (1933) (this Zbl. 7, 245). The  $O$ -inversion theorem reads as follows. Let  $s(t)$  be of bounded variation for  $t > 0$ , and let

$$\Phi(\sigma) = \int_0^\infty \varphi(\sigma t) d[s(t)]$$

converge for  $\sigma > 0$ , where  $\varphi(t)$  is a continuous, non-increasing function for which  $\int_0^\infty \varphi(t) t^{-1} dt$  exists. If  $\varphi(\sigma) = O(1)$  as  $\sigma \rightarrow 0$ , and  $\text{Max}_{t \leq t' \leq \lambda t} |s(t') - s(t)| < m(\lambda)$  for every  $t > 0$  and a  $\lambda > 1$ , then  $s(t) = O(1)$  as  $t \rightarrow \infty$ . The method actually gives an upper limit for  $\lim |s(t)|$ . In the  $o$ -theorem the assumptions are to be replaced by  $\Phi(\sigma) = o(1)$ ,  $s(\lambda t) - s(t) = o(1)$  as  $t \rightarrow \infty$  for every  $\lambda$ ,  $1 \leq \lambda < \lambda_0$ , and the conclusion becomes  $s(t) = o(1)$  as  $t \rightarrow \infty$ . The proofs are elementary. E. Hille.



**Reihen:**

**Fejes, Ladislás:** Des séries exponentielles de Cauchy. C. R. Acad. Sci., Paris **200**, 1712—1714 (1935).

The classical method of Cauchy for deriving exponential expansions of the type (\*)  $f(x) \sim \sum c_n e^{\lambda_n x}$  where  $\{\lambda_n\}$  are the roots of an entire function  $\pi(z)$  satisfying suitable conditions at infinity is extended to prove the equiconvergence of (\*) with the trigonometric Fourier series expansion of  $f(x)$  whenever  $f(x)$  is integrable.

*J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

**Sidon, S.:** Über die Fourier-Konstanten der Funktionen der Klasse  $L_p$  für  $p > 1$ . Acta Litt. Sci. Szeged **7**, 175—176 (1935).

Let  $B'$  denote the class of sequences  $0 < n_1 < n_2 < \dots$  such that the power series  $(\sum z^{n_\nu})^t$  has bounded coefficients. The following result is established. If

$f(x) \in L^p$ ,  $p > 1$ ,  $f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ , and if  $\{n_\nu\} \in B'$ , where  $p/2(p-1) \leq q < p/2(p-1) + 1$ , then  $\sum (a_{n_\nu}^2 + b_{n_\nu}^2)$  converges. *A. Zygmund*.

**Prasad, B. N.:** Note on the convergence of the conjugate series of a Fourier series. Proc. Acad. Sci., Allahabad **4**, 125—128 (1934).

The author corrects a slip in Hobson's proof (Hobson, Theory of Functions **2**, 695) of the following theorem of Young: If a periodic function  $f(x)$  is of bounded variation, then the series conjugate to the Fourier series of  $f$  converges at a point  $x$  if and only

if the integral  $-\frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+t) - f(x-t)] \frac{1}{2} \cot \frac{1}{2} t$  exists. *A. Zygmund* (Wilno).

**Fekete, M.:** On generalized Fourier series with non-negative coefficients. Proc. London Math. Soc., II. s. **39**, 321—333 (1935).

Es sei  $f(x)$  eine beschränkte meßbare Funktion, und für alle reellen  $\lambda$  existiere

der Mittelwert  $c(\lambda) = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{2\varepsilon_1} \int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_1} f(t) e^{-i\lambda t} dt$ . Dann ist  $c(\lambda)$  nur für abzählbar viele

Werte  $\lambda = \lambda_n$  von Null verschieden. Über solche Funktionen hat Ref. (Über Fourier-Reihen fastperiodischer Funktionen. S.-B. Berl. math. Ges. **1926**) ohne Beweis folgendes festgestellt. Gegeben sei ein  $\Omega > 0$ ; damit für jedes  $\omega < \Omega$  die Partialsumme

$$s_\omega(x) = \sum_{-\omega < \lambda_n < \omega} c(\lambda_n) e^{i\lambda_n x}$$

absolut konvergiere, ist hinreichend, daß die  $\lambda_n$ , mit  $|\lambda_n| < \Omega$ , linear unabhängig oder die dazugehörigen  $c(\lambda_n)$  reell und positiv sind. — Verf. findet wieder und begründet dieses Resultat, für dieselben und andere mit ihnen verwandte Partialsummen, unter der allgemeineren Voraussetzung  $c(0) \geq 0$ ,  $\Re c(\lambda_n) \geq 0$ ,  $\Re ic(\lambda_n) \geq 0$ ,  $0 < |\lambda_n| < \Omega$  und verschärft es durch Größenabschätzungen. — Interessante Folgerung: Falls  $f(x)$  reell fastperiodisch ist und die obigen Koeffizientenungleichungen für alle  $\lambda_n$  bestehen, dann sind die Partialsummen  $s_\omega(x)$  für  $\omega \rightarrow \infty$  gleichmäßig in  $-\infty < x < \infty$  gegen  $f(x)$  konvergent. *Bochner* (Princeton).

**Bochner, S.:** Summation of multiple Fourier series by spherical means. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **21**, 353—355 (1935).

Sei  $x = (x_1, \dots, x_k)$  ein Punkt im  $k$ -dimensionalen Euklidischen Raum und  $f(x)$  eine nach Lebesgue integrierbare und in jeder Variablen periodische Funktion der Periode  $2\pi$  mit der Fourierreihe  $f(x) \sim \sum a_{n_1 \dots n_k} e^{i(n_1 x_1 + \dots + n_k x_k)}$ . Ist nun  $\varphi(t)$ ,  $0 \leq t < \infty$ , eine feste Funktion mit  $\varphi(0) = 1$ , so kann man unter unwesentlichen Voraussetzungen über das Verhalten von  $\varphi(t)$  in  $\infty$  die „Partialsummen“

$$S_R(x) = \sum \varphi\left(\frac{v}{R}\right) a_{n_1 \dots n_k} e^{i(n_1 x_1 + \dots + n_k x_k)}, \quad v^2 = n_1^2 + \dots + n_k^2$$

bilden und Bedingungen suchen, unter welchen  $S_R(x) \rightarrow f(x)$  für  $R \rightarrow \infty$ . Diese



sphärischen Partialsummen haben den Vorteil über die rektangulären, daß sie nicht wie diese die Betrachtung der Funktion in einer „Kreuzumgebung“ eines gegebenen Punktes notwendig machen, sondern auf Grund der Formel  $S_R(x) = \int_0^\infty f_x(t) H(t, R) dt$  studiert werden können, wo  $H(t, R) = \frac{1}{t} \int_0^\infty \varphi\left(\frac{u}{tR}\right) u^{l+1} J_l(u) du$ ,  $l = \frac{k-2}{2}$  und  $f_x(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{2\pi^{k/2}} \int f(x_1 + t\xi_1, \dots, x_k + t\xi_k) d\xi_1 \dots d\xi_k$ ,  $\xi_1^2 + \dots + \xi_k^2 = 1$  das  $(k-1)$ -dimensionale sphärische Mittel von  $f(x)$  um den Punkt  $x$  bedeutet. Auf Grund der letzten Formel kann man auch für beliebige fastperiodische Funktionen  $f(x)$  die Summen  $S_R(x)$  definieren und studieren. — Eine ausführliche Behandlung des Gegenstandes (in Trans. Amer. Math. Soc.) wird angekündigt. B. Jessen.

### Differentialgleichungen:

**Aravysky, E.:** Sur les intégrales d'équation différentielle, l'intégration de laquelle se ramène aux quadratures. Mitt. Forsch.-Inst. Math. u. Mech. Univ. Tomsk 1, 90—96 u. franz. Zusammenfassung 97 (1935) [Russisch].

L'aut. retrouve (d'après le réferat dans les Fortschritte 1885) une partie des résultats obtenus par Maximowitch [Thèse russe, Kazan (1885)], notamment que toute équation du premier ordre  $\frac{dy}{dx} = f(x, y, \lambda)$ , contenant une fonction indéterminée  $\lambda(x)$ , intégrable par des quadratures, se ramène à une équation linéaire par une transformation de la variable dépendante. W. Stepanoff (Moskau).

**Mitrinowitch, Dragoslav S.:** Nouvelles formes intégrables d'une équation différentielle importante du premier ordre. Bull. Acad. Sci. Math. Nat., Belgrade Nr 2, 61—65 (1935).

L'auteur poursuit l'étude des cas d'intégrabilité par des quadratures de l'équation

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + a_2 y^2 + 2a_1 y \frac{dy}{dx} + 2a_2 = 0$$

(le même recueil, 1, 107—117; ce Zbl. 8, 352); cette fois il l'identifie à l'équation  $x\varphi(y') + y\psi(y') + (xy' - y)^m f(y') = 0$  ( $m = 2, -1, -2$ ) qui se ramène à une équation de Bernoulli par la transformation de Legendre. Il obtient:

$$\begin{array}{lll} (m=2) & a_2 = \frac{1}{x(x+\lambda)}, & a_1 = \frac{\nu-x}{x(x+\lambda)}, \quad 2a_0 = \frac{\mu}{x+\lambda}; \\ (m=-1) & a_2 = -\frac{\mu}{\lambda x^2 + \nu}, & 2a_1 = \frac{(\mu-\lambda)x}{\lambda x^2 + \nu}, \quad 2a_2 = \frac{1}{\lambda x^2 + \nu}; \\ (m=-2) & a_2 = \frac{x}{x^3 + \lambda}, & a_1 = -\frac{x^2}{x^3 + \lambda}, \quad 2a_0 = \frac{\mu}{x^3 + \lambda}. \end{array}$$

W. Stepanoff (Moskau).

**Peyovitch, Tadya:** Sur la méthode des approximations successives d'équations différentielles. Publ. Math. Univ. Belgrade 3, 49—64 (1934).

Für das System  $\frac{dz_i}{dt} + \sum_{k=1}^n a_{ik}(t) z_k = f_i(t, z_1, z_2, \dots, z_n)$ ,  $z_i(t_0)$  gegeben, wird ein

Existenzbeweis durch sukzessive Approximation gegeben.

Rellich.

**Peyovitch, T.:** Sur la solution asymptotique d'une équation différentielle du premier ordre. Publ. Math. Univ. Belgrade 3, 217—224 (1934).

In  $\frac{dx}{dt} = a + kx + a_n x^n$  sei  $a$  und  $a_n$  für  $t \geq t_0 \geq 0$  stetig und  $\lim_{t \rightarrow \infty} a = a_0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} a_n = 0$ ;  $k$  eine Konstante,  $n \geq 1$  ganz. Es wird angegeben, wann diese Differentialgleichung eine Lösung  $x$  besitzt mit  $\lim_{t \rightarrow \infty} x = \lim_{t \rightarrow \infty} x_0$ , wobei  $x_0$  Lösung von  $\frac{dx_0}{dt} = a + kx_0$  ist.

Rellich (Marburg, Lahn).



**Hukuhara, Masuo:** Sur les points singuliers des équations différentielles de Riccati. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I. Math. 2, 177—216 (1935).

Les intégrales de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = x^{\alpha-1} \{a(x)y + b(x)y + c(x)y^2\}$$

sont étudiées au voisinage du point  $x = \infty$ ;  $\alpha$  est un entier,  $a(x), \dots$  sont des fonctions finies et admettant un développement asymptotique pour  $x \rightarrow \infty$ ,  $\Omega < \arg x < \Omega'$ . Par des transformations des variables on ramène l'équation donnée à l'un des quatre types 1°  $\alpha < 0$ ; après la transformation  $x = \frac{1}{t}$  le point  $t = 0$  devient un point ordinaire; toute intégrale est développable pour  $\Omega < \arg x < \Omega'$  en série asymptotique de puissances de  $x$  (convergeant si  $a, b, c$  sont analytiques pour  $x = \infty$ ). 2°  $\alpha = 0$ ,  $a(x) \sim a_\mu x^{-\mu} + a_{\mu+1} x^{-\mu-1} + \dots$ ,  $b \sim b_0 + b_1 x^{-1} + \dots$ ,  $c \sim c_\nu x^{-\nu} + \dots$  ( $\mu, \nu > 1$ ) et 3°  $\alpha = 0$ ,  $a \sim a_\mu x^{-\mu} + \dots$ ,  $b \sim b_\nu x^{-\nu} + \dots$ ,  $c \sim c_0 + c_1 x^{-1} + \dots$ ; pour l'équation linéaire du 2<sup>d</sup> ordre correspondante  $t = 0$  est un point singulier régulier. Il existe une solution  $\varphi(x)$  avec le développement asymptotique  $\varphi(x) \sim \alpha_\mu x^{-\mu} + \alpha_{\mu+1} x^{-\mu-1} + \dots$  (ou bien  $\frac{1}{\varphi(x)} = \beta_\nu x^{-\nu} + \dots$  pour le type 2°, si  $b_0 = \mu, \mu + 1, \dots$ ); la solution générale a la forme  $y = \varphi + \frac{1}{\psi + C\chi}$ ,  $\psi$  et  $\chi$  admettant des développements asymptotiques (pour 2°  $\psi$  peut contenir un terme avec  $\log x$ , pour 3° ce fait a toujours lieu); les séries deviennent convergentes lorsque  $a, b, c$  sont analytiques. 4°  $\alpha > 0$ ,  $a_0 = c_0 = 0$ ,  $b_0 \neq 0$ . On a encore une solution du type  $\varphi$  (en général dans un angle plus restreint); dans la solution générale  $\psi$  a la même forme, tandis que  $\chi \sim e^{-B(x)} x^p (\gamma_0 + \gamma_1 x^{-1} + \dots)$ ,  $B$  étant un polynôme de degré  $\alpha$ .

W. Stepanoff (Moskau).

**Strutt, M. J. O.:** Die Hille'sche Differentialgleichung im komplexen Gebiet. Nieuw Arch. Wiskde 18, 31—55 (1935).

The author first seeks a solution of  $u''(z) + [\lambda + \Phi(z)]u = 0$  for which  $u(z_1 + \omega) = \sigma u(z_1)$  where  $\omega = 2m\omega_1 + 2n\omega_2$  and  $\Phi(z)$  is a doubly periodic function with periods  $\omega_1, \omega_2$ . Choosing two independent solutions  $u(z), v(z)$  such that  $u(z_1) = 1$ ,  $u'(z_1) = 0$ ,  $v(z_1) = 0$ ,  $v'(z_1) = 1$  the equation for  $\sigma$

$$\sigma^2 + \sigma \{u(z_1 + \omega) + v'(z_1 + \omega)\} + 1 = 0$$

has a discriminant  $F(\lambda, \omega) = \{u(\omega) + v'(\omega) - 2\} \{u(\omega) + v'(\omega) + 2\} \equiv F_a F_b$  which is an entire function of  $\lambda$ . The necessary and sufficient condition for the occurrence of stable values of  $\lambda$  is that  $F$  should be real and negative. The aim is to find the distribution of these values of  $\lambda$  in the complex  $\lambda$ -plane for prescribed values of  $\omega$  and  $\Phi$ . On a closed finite path along which  $F$  has no imaginary part the number of zeros is equal to the number of poles, each one being reckoned according to its multiplicity. In passing from one root to another along such a path either a pole of  $F$  or a zero of  $dF/d\lambda$  is encountered. — When  $|\lambda|$  is very large and  $\lambda = \nu^2$ ,  $\nu\omega = \alpha + i\beta$ ,  $\bar{\nu}\omega = \alpha - i\beta$ , we have  $u = \cos(\nu z)[1 + \varepsilon_1]$ ,  $v = \sin(\nu z)[1 + \varepsilon_2]$ ,

$F(\lambda\omega) = \{(1 + \varepsilon_3)(\cosh\beta \cos\alpha - i \sinh\beta \sin\alpha - 1)\} \{(1 + \varepsilon_4)(\cosh\beta \cos\alpha - i \sinh\beta \sin\alpha + 1)\}$ , where  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$  are quantities of order  $1/|\nu|$ . It follows that the discrete Eigenwerte for which  $F = 0$  are infinite in number and lie within a rectangular strip extending to infinity in the direction of the positive real axis and symmetric about this axis. Two zeros of  $F_a$  on a line parallel to the imaginary axis lie generally between two parallel lines each containing a pair of roots of  $F_b$ . Stable values of  $\lambda$  are to be found between two successive parallel lines containing respectively roots of  $F_a$  and  $F_b$  while labile values of  $\lambda$  are to be found between two successive parallel lines containing roots of one of the functions  $F_a, F_b$ . When  $|\lambda|$  is large the labile  $\lambda$ -intervals are very small, successive Eigenwerte of the same type being almost coincident. A value of  $\lambda$  is only stable when the associated value of  $F$  is real and negative. A stable  $\lambda$ -integral of a curve on which  $F$  is real is either bounded on both sides by labile  $\lambda$ -intervals

this curve or it extends to infinity. — The author next considers the equation  $u''(z) + [\lambda + \gamma \Phi(z)]'u = 0$  in which both  $\lambda$  and  $\gamma$  may be complex. The asymptotic behavior of the Eigenwert surfaces is studied in the  $\lambda\gamma$ -space when  $|\lambda| + |\gamma|$  is large. Integrals of the square root of  $\lambda + \gamma \Phi(z)$  appear as the arguments of the circular functions in the asymptotic expressions. The paper closes with a summary of the applications and the literature.

H. Bateman (Pasadena).

**Michnevitch, D.: Groupes fonctionnels et leurs applications.** C. R. Acad. Sci., Paris **200**, 2053—2055 (1935).

Verf. verallgemeinert früher gefundene Sätze [C. R. Acad. Sci., Paris **197**, 893 (1933); dies. Zbl. **7**, 407]. Mit Hilfe einer schiefssymmetrischen Matrix, deren Koeffizienten aus den Differentialgleichungen des vollständigen Systems entnommen werden, bestimmt man die genaue Anzahl der Hauptlösungen.

W. Landherr.

**Jacques, Raymond: Sur certains systèmes d'équations aux dérivées partielles.** C. R. Acad. Sci., Paris **201**, 20—21 (1935).

L'auteur examine les suites de Laplace dont chaque congruence paire appartient à certain complexe linéaire, et les deux systèmes d'équations différentielles qui déterminent les réseaux focaux de la suite ou le réseau tracé par une congruence impaire sur un plan parallèle à l'axe commun des complexes.

S. Finikoff (Moscou).

**Giambelli, Giovanni: Una interpretazione geometrica di sistemi di equazioni alle derivate parziali a coefficienti costanti. I.** Atti Accad. Peloritana Messina **36**, 5—11 (1934).

L'auteur appelle l'hypersurface  $f(x_1, x_2 \dots x_n) = 0$  l'image de l'équation linéaire à coefficients constants  $f(D_1, D_2 \dots D_n)z = 0$  (où  $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ ). Même définition pour un système d'équations. Un intégral  $z = e^{a_1x_1 + \dots + a_nx_n}$  correspond au point image  $A \equiv (a_1 \dots a_n)$ . Une translation du système est une opération qui correspond à une translation de l'image. L'effet d'une translation sur un intégral.

S. Finikoff.

**Giambelli, Giovanni: Una interpretazione geometrica di sistemi di equazioni alle derivate parziali a coefficienti costanti. II.** Atti Accad. Peloritana Messina **36**, 13—20 (1934).

En poursuivant l'étude l'auteur applique sa théorie à l'intégration de quelques équations simples et examine l'ordre d'un système  $\Sigma$  régulier (l'ordre = le nombre des constantes arbitraires de l'intégral général du système composé de  $\Sigma$  et du système associé).

S. Finikoff (Moscou).

**Giambelli, Giovanni: Una interpretazione geometrica di sistemi di equazioni alle derivate parziali a coefficienti costanti. III.** Atti Accad. Peloritana Messina **36**, 21 bis 27 (1934).

En appliquant le théorème  $Af + A\varphi$  de Noether l'auteur examine l'équation différentielle tangente en  $A$  à l'équation  $f(D_1, D_2 \dots D_n)z = 0$  (= l'équation qui a pour image l'ensemble des tangentes au point  $A$  à l'hypersurface l'image de  $f = 0$ ) et obtient la formule de Cayley-Cauchy.

S. Finikoff (Moscou).

**Bertuccelli, Paolo: Una formola di Cayley-Cauchy per un sistema di 1° grado di equazioni alle derivate parziali a coefficienti costanti.** Atti Accad. Peloritana Messina **36**, 73—78 (1934).

En poursuivant l'étude de M. Giambelli (voir les réf. préc.) l'auteur détermine à l'aide de la formule de postulation de M. Severi le nombre de dimensions d'un système linéaire de polynômes du degré donné qui vérifient un système désigné au titre.

S. Finikoff (Moscou).

**Romano, Salvatore: Immagini di sistemi di equazioni omogenee di grado razionale alle derivate parziali a coefficienti costanti.** Atti Accad. Peloritana Messina **36**, 79 bis 83 (1934).

L'auteur généralise la théorie de M. Giambelli (voir les réf. préc.). 1° Une équation  $F(D)z = 0$  donnée, on remplace chaque dérivée  $\zeta = \frac{\partial^{a_1 + \dots + a_n} z}{\partial x_1^{a_1} \dots \partial x_n^{a_n}}$  par le pro-



duit  $\xi_{1s_1}, \xi_{2s_2}, \dots, \xi_{ns_n}$ ; les divers  $\xi_{10}, \xi_{11}, \dots, \xi_{1m_1}$  ( $m_1 = \text{maximum de } s_1 \text{ dans les diverses dérivées } \xi$ ) déterminent un point dans  $[m_1]$ . Un espace  $[m_i]$  à part correspond à chaque  $x_i$ . Si l'on donne dans chaque  $[m_i]$  une courbe rationnelle  $\Gamma_i$ , l'équation  $F(\xi) = 0$  obtenue établit une correspondance entre les points de  $\Gamma_i$  qui est la première image de  $F(D)z = 0$ . 2° On obtient la seconde en remplaçant dans  $F(D)z = 0$  chaque  $\xi$  par le produit  $\eta_1^{s_1} \eta_2^{s_2} \dots \eta_n^{s_n}$ . C'est l'hypersurface dans l'espace à  $n$  dimensions. 3° Si l'on remplace chaque dérivée  $\xi_i$  par une coordonnées  $\zeta_i$ , on obtient  $f(\zeta_1 \dots \zeta_i) = 0$  la troisième image de  $F(D)z = 0$ .  
S. Finikoff (Moscou).

**Thomas, T. Y.:** Un corollaire du théorème de Riquier. Bull. Sci. math., II. s. 59, 134—140 (1935).

Let  $S$  be a system of analytic partial differential equations in unknowns  $u_\alpha$  and independent variables  $x_i$  ( $\alpha = 1, \dots, r$ ;  $i = 1, \dots, n$ ), where  $r$  and  $n$  are finite. The theorem of Riquier in question implies the existence of a non-negative integer  $M$  such that the  $M$ -th derived system  $S_M$  is compatible in the derivatives regarded as unknowns if and only if  $S$  has a solution. Let  $S$  be named  $S'$ , when a certain set of the unknowns are regarded as parametric, and  $S''$ , when these same unknowns are replaced by arbitrarily given functions of the  $x$ 's, and let the corresponding minimum numbers  $M$  be  $M'$  and  $M''$ . The author shows that  $M' \geq M''$ . His restriction that the derivatives of the parametric unknowns do not enter into  $S$  is unnecessary. Applications are indicated.  
J. M. Thomas (Durham).

**Heymann, O.:** Über das Gravitationspotential eines homogenen Ellipsoids. Astron. Nachr. 256, 181—186 (1935).

Berechnung des genannten Potentials. Abgesehen von der ziemlich heuristischen Sprechweise scheint kein prinzipieller Unterschied gegenüber der üblichen Methode mit den konfokalen Ellipsoiden vorzuliegen [vgl. etwa C. Jordan, Cours d'analyse, 3. Aufl. 2, 247 ff. (1913)].  
W. Feller (Stockholm).

**Ásgeirsson, Leifur:** Beweis des MacLaurinschen Satzes über die Anziehung homogener konfokaler Ellipsoide, mit Hilfe eines Satzes über die Lösungen der partiellen Differentialgleichung  $\sum_{i=1}^n U_{\xi_i \xi_i} - \sum_{i=1}^n U_{\eta_i \eta_i} = 0$ . (Stockholm, Sitzg. v. 14.—18. VIII. 1934.) 8. Skand. Mat.-Kongr., 389—391 (1935).

Für den Satz „Die Newtonschen Potentiale zweier homogener konfokaler Ellipsoide auf einen äußeren Punkt sind den Massen bzw. den Volumina der Ellipsoide proportional“ wird ein neuer Beweis gegeben. Dies geschieht auf Grund der Ergebnisse einer anderen Arbeit des Verf., die demnächst in den Math. Ann. unter dem Titel „Über eine Mittelwertseigenschaft von Lösungen homogener linearer partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten“ erscheinen wird.  
Maruhn (Leipzig).

**Vasilescu, Florin:** Sur la méthode du balayage de Poincaré, son extension par M. de la Vallée Poussin, et le problème de Dirichlet généralisé. J. Math. pures appl., IX. s. 14, 209—227 (1935).

Ce problème de Dirichlet est relatif aux fonctions harmoniques, et on l'entend au sens de Wiener, pour un ensemble parfait et borné, sans aucune restriction. L'aut. démontre que la méthode du balayage résout ce problème. Dès le début du mémoire, il démontre un théorème sur la continuité du potentiel à travers les masses, théorème d'où résulte une nouvelle démonstration du lemme de Kellogg, déjà démontré par G. C. Evans (ce Zbl. 6, 349). A la fin du travail, l'aut. étudie le balayage d'un domaine non borné.  
Georges Giraud (Bonny-sur-Loire).

**Gevrey, Maurice:** Les quasi-fonctions de Green et les systèmes d'équations aux dérivées partielles du type elliptique. Ann. École norm., III. s. 52, 39—108 (1935).

L'aut. forme des équations de Fredholm, dont les solutions, prises comme densités de certains potentiels généralisés, fournissent des solutions des problèmes

relatifs à des équations ou à des systèmes d'équations du type elliptique. Pour une équation, le problème envisagé est soit du type de Dirichlet, soit de ce que l'aut. nomme type de Neumann et type mixte: ce sont les types où la condition à la frontière porte sur une combinaison linéaire de la dérivée conormale et de la fonction inconnue (le type de Neumann est alors celui où le terme qui contient l'inconnue, disparaît). Les systèmes d'équations sont d'un type déjà annoncé par l'aut. (ce Zbl. 3, 257), qui considère d'abord le cas où chaque condition à la frontière ne contient qu'une inconnue, puis un cas plus général. Les équations de Fredholm sont formées à l'aide des quasi-fonctions de Green: ce sont des fonctions  $W(P, Q)$  qui remplissent par rapport à  $P$ , sur la frontière, une condition linéaire et homogène, et qui se comportent dans le domaine comme les fonctions introduites par E. E. Levi. L'aut. cherche ensuite si ses équations intégrales équivalent aux problèmes envisagés; il croit pouvoir conclure affirmativement, mais sa démonstration ne semble pas exacte: on peut évidemment construire une fonction  $K(P, Q)$  positive et une fonction  $\varphi(Q)$  non identiquement nulle, de façon que  $\int_D K(P, Q) \varphi(Q) d\omega_Q$  soit identiquement nul,

et il semble, d'après le texte (page 101, lignes 7 à 10), que cette possibilité empêche les déductions de l'aut. Un dernier paragraphe donne de brèves indications sur certains problèmes non linéaires.

*Georges Giraud* (Bonny-sur-Loire).

**Masloff, A. Th.:** Sur les solutions quadratiques de l'équation harmonique ( $A_{3,2}$ ). J. Math. pures appl., IX. s. 14, 229—232 (1935).

Il s'agit de l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = \left[ -\frac{6}{(u-v)^2} + \frac{2}{(u+v)^2} \right] \theta,$$

dont on cherche les systèmes de solutions  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ , tels qu'on ait

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_p^2 = \text{fonct. de } u + \text{fonct. de } v.$$

Bertrand Gambier a trouvé les systèmes qui satisfont à une certaine condition [J. Math. pures appl., IX. s. 9, 333—361 (1930)]. L'aut. démontre que cette condition est nécessaire, comme le présumait Gambier. *Georges Giraud* (Bonny-sur-Loire).

**Biot, M.:** Un cas d'intégrabilité de l'équation non linéaire de la chaleur et de la consolidation des sédiments argileux. Ann. Soc. Sci. Bruxelles B 55, 106—109 (1935).

Verf. behandelt eine Randwertaufgabe der nichtlinearen Wärmeleitungsgleichung  $ap_t = (kp_x)_x$ , in welcher  $a$  und  $k$  gegebene Funktionen der gesuchten Funktion  $p$  sind und  $a$  proportional zu  $k$  ist. Indem  $p$  als Funktion von  $x^2/t$  angesetzt wird, wird die partielle auf eine gewöhnliche Differentialgleichung mit getrennten Variablen zurückgeführt. — Die behandelte Gleichung findet eine Anwendung in der Erdbau-mechanik. — Verf. schließt mit einer Bemerkung über den Fall, daß  $a$  und  $k$  nicht in konstantem Verhältnis stehen.

*E. Rothe* (Breslau).

**Germa, R.-H.-J.:** Sur des systèmes d'équations intégral-différentielles à deux variables indépendantes généralisant les équations aux dérivées partielles de M. Ét. Delassus. I. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 4, 212—216 (1935).

### Integralgleichungen, Funktionalanalysis und Verwandtes:

**Niemytzki, V.:** Sur une classe générale d'équations intégrales non-linéaires. Rec. math. Moscou 41, 655—658 u. franz. Zusammenfassung 658 (1935) [Russisch].

Using certain results of Banach and Cacciopoli concerning the existence of fix-points of transformations  $A(f)$  of a complete metric space into itself, the author proves that the integral equation  $u(x) = \lambda \int_G K(x, y, u) dy$  has a solution for sufficiently small  $|\lambda|$  provided  $\iint_{GG} K^2(x, y, 0) dx dy < \infty$  and  $|K(x, y, u_1) - K(x, y, u_2)| < C|u_1 - u_2|$  for all  $x, y$  in  $G$  and all  $u$  satisfying condition  $\int_G u^2 dx < L$ . There exists a unique continuous solution if, in addition,  $K(x, y, u)$  is continuous in  $(x, y)$ . *J. D. Tamarkin.*



**Kupradze, V.: La méthode des équations intégrales dans la théorie de la diffraction.** Rec. math. Moscou 41, 561—574 u. franz. Text 575—581 (1935) [Russisch].

Exposé détaillé des résultats de l'auteur contenus dans ses notes antérieures (ce Zbl. 8, 209, 313; 9, 358). L'auteur donne une solution complète et effective des problèmes de Dirichlet et de Neumann pour l'équation  $\Delta u + k^2 u = 0$  par rapport à un contour fermé (de longueur  $l$ ) avec une tangente continue. La base de la méthode est la construction de deux solutions de ladite équation, qu'on peut nommer les potentiels logarithmiques généralisés de simple et de double couche:

$$V(x, y) = \int_0^l \nu(s) \left[ \frac{1}{2i} H_0^{(2)}(kr) \right] ds, \quad W(x, y) = \int_0^l \mu(s) \left[ \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{2i} H_0^{(2)}(kr) \right] ds$$

dont les propriétés sont analogues à celles du potentiel ordinaire. A l'aide de ces potentiels les problèmes en question sont transformés dans les équations intégrales que l'auteur étudie dans tous les détails. L'unicité de la solution des problèmes extérieurs est la conséquence du „principe d'irradiation“:  $\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + iku \right) = 0$ . —

Quelques remarques à propos des applications physiques de ces théorèmes, p. ex. dans la théorie de la diffraction. Janczewski (Leningrad).

**Cimino, G. Virginia: Ordine delle funzioni di permutabilità multiple di Volterra.** Atti Accad. Peloritana Messina 36, 135—142 (1934).

Im Anschluß an Volterra, Leçons sur les fonctions de lignes (Paris 1919), définit Verf. die vielfache Komposition zweier Funktionen  $f, \varphi$ , die von zwei Systemen von  $m$  Veränderlichen  $x_i, y_i$  abhängen als die Operation

$$\int_{x_1}^{y_1} \dots \int_{x_m}^{y_m} f(x_i, \xi_i) \varphi(\xi_i, y_i) d\xi_1 \dots d\xi_m.$$

Es folgen die Definitionen von Vertauschbarkeit zweier Funktionen  $f, \varphi$  und Ordnung einer Funktion  $f$ , ein Satz über die Ordnung und ein Satz über die Lösung von Integralgleichungen, die sich mit Hilfe von Kompositionen ausdrücken lassen, welche dem Wortlaut nach den entsprechenden Volterras für einfache ( $m=1$ ) Komposition identisch sind. G. Cimmino (Napoli).

**Giambelli, Giovanni: I connessi e la composizione multipla di Volterra.** Atti Accad. Peloritana Messina 36, 127—134 (1934).

Sei  $U$  eine Funktion der  $n$  Variablen  $x_i$  und der Variablen  $\theta, t$ . Die Volterrasche Integro-Differentialgleichung

$$\sum_{i=1}^n U_{x_i x_i}(x_i | \theta, t) + \int_{\theta}^t \sum_{i=1}^n U_{x_i x_i}(x_i | \theta, \xi) f_i(\xi, t) d\xi$$

wird hier dahin verallgemeinert, daß  $\theta, t$  nicht mehr einfache Variablen, sondern Punkte eines  $m$ -dimensionalen Raumes sind und dementsprechend das Integral  $m$ -fach ist. Bestimmung der Hauptlösung. Definition einer weiteren Klasse von halblinearen Integro-Differentialgleichungen, die in gewisser Beziehung mit Punktkonnexen des  $m$ -dimensionalen Raumes stehen. G. Cimmino (Napoli).

**Welin, Hermann: Über lineare Operatoren mit besonderer Berücksichtigung der Fragen über Nichtvertauschbarkeit.** Publ. Math. Univ. Belgrade 3, 13—38 (1934).

This paper considers operator manifolds generated by elementary linear operators  $O_s^r$  whose domain consists of functions of  $n$  variables  $(x_1, \dots, x_n)$ ; the result of the operation  $O_s^r f$  is assumed independent of  $x_s$  and it is further assumed that if  $f = gh$  (where  $g$  is free of  $x_s$ ) then  $O_s^r f = g O_s^r h$  and that there exist functions  $f$  for which  $O_s^r f \neq 0$ . The operator manifolds are of the type  $O_{s_1 \dots s_n}^{r_1 \dots r_n} \equiv O_{s_1}^{r_1} \dots O_{s_n}^{r_n}$  where  $(r_1 \dots r_n)$  and  $(s_1 \dots s_n)$  are permutations of  $(1, \dots, n)$ . The principal question under discussion is the existence of a function  $\Phi$  such that  $O_{s_1 \dots s_k}^{r_1 \dots r_k} \Phi = A_{s_1 \dots s_k}$  where the  $A_{s_1 \dots s_k}$  are arbitrarily assigned for each permutation of the  $k \leq n$  letters  $s_1 \dots s_k$ .

The answer is in the negative unless the elementary operators are further particularised but if the  $A_{s_1 \dots s_k}$  are granted all different an affirmative answer may be given. The

operators under consideration include  $O_s = Lt$ ,  $O_s = \frac{\partial}{\partial x_s}$ ,  $O_s = \int_a^b dx_s$ .

Murnaghan (Baltimore).

Karamata, J., und H. Wendelin: Zu Fragen über nichtvertauschbare Grenzprozesse. Publ. Math. Univ. Belgrade 3, 39—41 (1934).

In this paper an explicit construction of  $\Phi$  functions (cf. the preceding Ref.) is given for the case where the operators  $O$  are either simple limits:  $O_s = Lt$  or simple

differentiations:  $O_s = \frac{\partial}{\partial x_s}$ . The construction uses the functions  $\varphi_{pq} = \frac{x_p^2}{x_q^2 + x_p^2}$ .

Murnaghan (Baltimore).

Kolmogoroff, A.: La transformation de Laplace dans les espaces linéaires. C. R. Acad. Sci., Paris 200, 1717—1718 (1935).

Statement (without proofs) of some results concerning the functional

$$H(f) \equiv \int_E e^{if(x)} dF(E)$$

where  $F(A)$  is a real valued and completely additive function of  $B$ -measurable sets of a Banach space  $E$ , and  $f(x)$  is a linear functional over  $E$ . These results extend to the case of a general Banach space  $E$  known properties of characteristic functions of distributions in an  $n$ -dimensional Euclidean space.

J. D. Tamarkin.

### Funktionentheorie:

Aumann, Georg: Zwei Sätze über Differential- und Differenzenquotient von analytischen Funktionen. Math. Z. 40, 202—204 (1935).

Es seien  $a$  und  $b$  zwei Punkte des schlichten Gebietes  $G$ , ferner sei  $F$  eine Familie der in  $G$  regulären Funktionen  $f(z)$  mit  $f(a) = a$ ,  $f(b) = b$ . Bezeichnet  $C$  eine  $a$  mit  $b$  innerhalb von  $G$  verbindende Kurve und  $M$  das Maximum von  $|f'(z)|$  längs  $M$ , so ist die untere Grenze von  $M$  für alle zulässigen  $C$  und für alle  $f(z)$  aus  $F$  entweder positiv oder Null. Es wird gezeigt, daß der erste Fall vorliegt, wenn  $F$  eine normale Familie ist, dagegen der zweite, wenn  $F$  alle Funktionen der genannten Beschaffenheit umfaßt.

G. Szegő (St. Louis, Mo.).

Lee, Kwok Ping: On meromorphic functions of infinite order. Jap. J. Math. 12, 1—16 (1935).

En utilisant la notion de fonction-type de Blumenthal et les théorèmes de R. Nevanlinna sur les fonctions méromorphes, l'auteur étend à ces fonctions la théorie que Blumenthal avait donnée pour les fonctions entières (Principes de la théorie des fonctions entières d'ordre infini. Paris 1910). Il introduit donc un ordre  $\mu(r)$  défini par

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log [\log T(r, f) / \log r]}{\log \mu(r)} = 1,$$

$\mu(r)$  étant à croissance typique. Quelques énoncés (th. II, VI, VII) semblent renfermer un lapsus; il faut y lire  $\log T$  ou  $\log N$  au lieu de  $T$  ou  $N$ . L'auteur paraît ignorer le travail de King Lai Hiong (ce Zbl. 6, 63 et 8, 364) où est introduit un ordre  $\varrho(r)$  tel que

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log T(r, f)}{\varrho(r) \log r} = 1,$$

conduisant à des relations plus précises.

G. Valiron (Paris).

Bernstein, V.: Sopra una proprietà degli ordini precisati. Boll. Un. Mat. Ital. 14, 165—168 (1935).

L'auteur indique une méthode permettant de compléter la démonstration d'une importante inégalité de son mémoire des Ann. Mat. pura appl. sur les directions de Borel des fonctions holomorphes (ce Zbl. 8, 318). Cette inégalité:  $\sum_{\nu=p_0}^p V(\xi^\nu) \leq A(\xi) V(r)$



où  $\xi > 1$  est donné arbitrairement,  $p_0$  et  $p$  entiers,  $p > p_0$ ,  $\xi^{p-1} < r \leq \xi^p$ ,  $r > r_0(\xi, V)$ , et où  $\log V(r) = \varrho(r) \log r$ ,  $\varrho(r)$  désignant un ordre précisé, découle aisément de la propriété fondamentale qui a servi à déterminer la définition de l'ordre précisé. *G. Valiron.*

**Ahlfors, Lars:** Sur le type d'une surface de Riemann. C. R. Acad. Sci., Paris **201**, 30—32 (1935).

Allgemeine Betrachtungen anlässlich einer Arbeit von Kobayashi (dies. Zbl. **11**, 169). Die dort angewandte Methode beruht, ebenso wie ein ähnliches vom Verf. und R. Nevanlinna (s. dasselbe Ref.) verwendetes Verfahren, auf der Einführung einer besonderen Maßbestimmung auf der Riemannschen Fläche. *L. Ahlfors.*

**Visser, Cornelis:** Sur la dérivée angulaire des fonctions univalentes. II. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **38**, 618—627 (1935).

L'auteur a donné (voir ce Zbl. **10**, 120) une condition nécessaire et suffisante pour qu'un domaine simplement connexe  $G$  intérieur à un demi-plan  $D$  soit représenté conformément sur  $D$  par une fonction admettant une dérivée angulaire positive à l'infini. Il en déduit ici des propositions connues et d'autres nouvelles, notamment: 1° si  $G$  possède la propriété indiquée il en est de même de tout domaine simplement connexe contenu dans  $D$  et contenant  $G$ ; 2° si  $z = x + iy$  et si  $D$  est le demi-plan  $x \geq 0$ , si  $G$  est défini par  $|y| < h(x)$  où  $h(x)$  est une fonction continue pour  $x \geq 0$  telle que  $h(0) = 0$ ,  $h(x) > 0$  pour  $x > 0$ ,  $h(x)$  non décroissante, pour que la fonction représentant  $G$  sur  $D$  ait sa dérivée angulaire à l'infini positive, il faut et il suffit que l'intégrale

$\int_1^\infty \frac{dt}{h(t)}$  existe. (I. voir ce Zbl. **10**, 120.)

*G. Valiron* (Paris).

**Kerékjártó, B. de:** Démonstration nouvelle d'un théorème de Klein et Poincaré. Acta Litt. Sci. Szeged **7**, 160—162 (1935).

Der Satz besagt, daß eine algebraische Fläche vom Geschlecht  $p > 1$  höchstens endlich viele konforme Selbstabbildungen gestattet. Der Beweis wird ohne Anwendung infinitesimaler Transformationen geführt. *L. Ahlfors* (Helsingfors).

**Kerékjártó, B. de:** Sur l'indice des transformations analytiques. Acta Litt. Sci. Szeged **7**, 163—172 (1935).

Das Ziel der Arbeit ist, den topologischen Kern von einigen funktionentheoretischen Sätzen herauszuschälen. Es sei  $C$  eine Jordankurve in der komplexen  $z$ -Ebene und  $z' = f(z)$  eine innerhalb und auf  $C$  stetige, komplexwertige Funktion. Ferner sei  $z' \neq z$  auf  $C$ . Dann wird die durch  $2\pi$  dividierte Arcusvariation des Vektors  $zz'$ , wenn  $z$  die Kurve  $C$  einmal im positiven Sinne durchläuft, als der Index der Abbildung  $f$  bezeichnet. 1. Ist  $f(z)$  analytisch, so folgt aus der Cauchyschen Integralformel, daß der Index nichtnegativ ist. Daraus ergeben sich durch einfachste topologische Betrachtungen ein Satz von Pólya (dies. Zbl. **7**, 169) sowie einige neue Verallgemeinerungen. 2. Der Index einer Abbildung wird durch Schnittindizes von  $C$  und der Bildkurve  $C'$  ausgedrückt. 3. Schließlich wird darauf hingewiesen, daß der Rouchésche und verwandte Sätze [vgl. beispielsweise Hadamard, Note sur quelques applications de l'indice de Kronecker, in Tannery, Théorie des fonctions, 2. éd. (1910), Pompeiu (dies. Zbl. **5**, 365), Montel (dies. Zbl. **6**, 62)] Spezialfälle eines allgemeinen topologischen Satzes über stetige Abbildungen von Mannigfaltigkeiten sind. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

### **Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:**

**Reichenbach, Hans:** Über Induktion und Wahrscheinlichkeit. Bemerkungen zu Karl Poppers „Logik der Forschung“. Erkenntnis **5**, 267—284 (1935).

**Cramér, H.:** Sugli sviluppi asintotici di funzioni di ripartizione in serie di polinomi di Hermite. Giorn. Ist. Ital. Attuari **6**, 141—157 (1935).

In einer grundlegenden Arbeit (On the composition of elementary errors I. Skand. Aktuarie Tidsskr. **1928**) hat Verf. die Theorie der von Bruns und Charlier in die

Statistik eingeführten Entwicklungen nach Hermiteschen Polynomen („*A*- und *B*-Reihen“) auf eine exakte Grundlage gestellt und unter sehr allgemeinen Voraussetzungen genaue Fehlerabschätzungen abgeleitet. Die Reihenabschnitte liefern im allgemeinen trotz Divergenz der Reihen gut brauchbare asymptotische Entwicklungen; umgekehrt brauchen aber sogar die Abschnitte gut konvergenter Reihen keine asymptotischen Ausdrücke zu liefern. In der vorliegenden Arbeit wird nun noch ein spezieller Fall angegeben, in welchem die Reihen konvergieren und gut brauchbare asymptotische Ausdrücke liefern, und zwar zugleich auch für die Frequenzfunktion. Es handelt sich um die Summe von statistischen Variablen mit derselben Verteilungsfunktion  $F(x)$ , von der vorausgesetzt wird, daß eine zweite Ableitung existiert mit

$$2\sqrt{\pi}|F''(x) - \Phi''(x)| < e^{-\frac{x^2}{4}}, \text{ wobei } \Phi(x) \text{ die Normalfunktion bezeichnet.}$$

W. Feller (Stockholm).

**Cramér, Harald: Prime numbers and probability.** (Stockholm, Sitzg. v. 14.—18. VIII. 1934.) 8. Skand. Mat.-Kongr., 107—115 (1935).

Die mengentheoretischen Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung gestatten es, die seit langem in der Zahlentheorie heuristisch benutzten Wahrscheinlichkeitschlüsse exakt zu fassen: Neben der Zahlenreihe wird eine wohldefinierte Menge von anderen Folgen betrachtet und gezeigt, daß die zu untersuchende Relation in einem bestimmten Sinne für fast alle dieser Folgen statthat. Freilich haben solche Schlüsse für die Zahlentheorie immer nur heuristischen Wert als Wegweiser. — Durch Anwendung des Satzes vom iterierten Logarithmus gelangt Verf. insbesondere zu zwei Relationen, welche Größenordnungen für  $\pi(x) - Li(x)$  bzw.  $p_{n+1} - p_n$  liefern würden. Im zweiten Falle kann unter Annahme der Riemannschen Vermutung wenigstens ein Teil des heuristischen Resultats auch bewiesen werden: Durchläuft  $p_{k_n}$  die Primzahlen  $p_n$  mit  $p_{n+1} - p_n > (\log p)^3$ , die kleiner sind als  $x$ , so ist  $\sum (p_{k_{n+1}} - p_{k_n}) = o(x)$ . Der Beweis wird ausführlich skizziert.

W. Feller (Stockholm).

**Gulberg, Alf: Über die Anwendung der Differenzengleichungen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.** (Stockholm, Sitzg. v. 14.—18. VIII. 1934.) 8. Skand. Mat.-Kongr., 13—19 (1935) [Norwegisch].

Es wird bemerkt, daß man bei Verteilungsfunktionen (auch mit mehreren Variablen), die durch Differenzengleichungen definiert sind (etwa bei der Binomialverteilung), für die vollständigen und unvollständigen Momente leicht Rekursionsformeln ableiten kann.

W. Feller (Stockholm).

**Gulberg, Alf: Sur les lois de probabilités et la corrélation.** Ann. Inst. H. Poincaré 5, 159—176 (1935).

The author studies the characteristics of the following distribution functions in two discrete variables: the Bernoulli, the Poisson, the Pascal, and the hypergeometric. Recursion formulae for the moments and the value of the coefficient of correlation are given in each case. Criteria in terms of the moments (or semi-invariants) are found that a given correlation table as a whole may be represented by one of these laws. "Local criteria" which the cell frequencies of each pair of values of the variables should satisfy in each case are also developed. Three numerical examples, two for the Bernoulli law and one for the hypergeometric law, are worked out. C. C. Craig.

**Scarborough, J. B.: On the computation of the probable error of a weighted mean.** Amer. Math. Monthly 42, 286—301 (1935).

This paper is concerned with the relative merits of the two methods for estimating the probable error of the weighted mean formed from the means of several sets of measurements. The author maintains his former position that the first method based on the formula for the standard deviation of a linear form in several independent variables is superior in practice to the second in which the standard deviation of the weighted mean is estimated from the weighted sum of the squared deviations of the component means about the weighted mean. He shows analytically that for two or



three means, the two methods may give widely different results, and by means of artificial numerical examples that the same thing may happen for more numerous sets. He neglects to bring out what seems to the reviewer the obvious explanation, — that generally in practice the second method utilizes an estimate of variance based on but a few items and hence is much more subject to sampling error than the first.

*C. C. Craig* (Ann Arbor, Michigan).

**Koeppler, Hans:** Das Fehlergesetz des Korrelationskoeffizienten und andere Wahrscheinlichkeitsgesetze der Korrelationstheorie. *Metron* 12, Nr 2, 105—120 (1935).

The author rederives the usual approximate formula for the standard error of a coefficient of correlation.

*C. C. Craig* (Ann Arbor, Michigan).

**Láska, V.:** Contribution à la standardisation des définitions des principales notions statistiques. *Statist. Obzor* 16, 3—12, franz. Zusammenfassung (1935) 3 [Tschechisch].

**Jackson, Dunham:** Mathematical principles in the theory of small samples. *Amer. Math. Monthly* 42, 344—364 (1935).

Elementare Einführung in die Theorie der Verteilungsfunktionen verschiedener statistischer Maßzahlen.

*Herman Wold* (Stockholm).

**Gumbel, E. J.:** Le plus grand âge, distribution et série. *C. R. Acad. Sci., Paris* 201, 318—320 (1935).

**Timpe, Aloys:** Elastizität von Angebot und Nachfrage. *Arch. math. Wirtsch.-u. Sozialforsch* 1, 103—114 (1935).

Vorschlag eines einfachen theoretischen Ansatzes für die Abhängigkeit des Angebots und der Nachfrage vom Preis und der Zeit; Anwendung auf die Beschreibung von statistischem Material des amerikanischen Baumwollmarktes.

*W. Fenchel*.

**Meidell, Birger:** Über eine explizite Lösung der allgemeinen Gleichung  $n$ -ten Grades der Finanzmathematik. (*Stockholm, Sitzg. v. 14.—18. VIII. 1934.*) 8. Skand. Mat.-Kongr., 228—236 (1935).

Die Gleichung  $n$ -ten Grades

$$A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n - K = 0$$

tritt bei der Berechnung des effektiven Zinsfußes einer Anleihe auf, deren Kurs gleich  $K$

ist.  $x = \frac{1}{1+y}$ ,  $y$  = effektiver Zinsfuß. Nach geeigneter Transformation der obigen Gleichung gibt der Verf. für den effektiven Zinsfuß mittels der Lagrangeschen Formel eine Reihenentwicklung an, für die er auch den Konvergenzradius in einfacher Weise angeben kann. Die Konvergenz der Reihe ist in den praktisch wichtigen Fällen sehr gut.

*Löer* (Göttingen).

## Geometrie.

**Golaž, Stanislaw:** Métrique angulaire des espaces généraux. Principe de Chasles. *Wiadom. mat.* 38, 31—42 (1935) [Polnisch].

The author investigates the notion of angle (possessing the additive properties) in spaces where the concept of vector can be defined. The discussion is independent of the notion of distance.

*A. Zygmund* (Wilno).

**Wrona, Włodzimierz:** Sur les géométries planes dans lesquelles les segments rectilignes sont les plus courts. *Wiadom. mat.* 39, 1—40 (1935) [Polnisch].

Mit der Geometrie, in der die euklidischen Geraden die Kürzesten sind, befaßten sich hauptsächlich: Berwald, Funk, Hamel, Hilbert, Minkowski, Schilling und Wirtinger. Über ihre Arbeiten, soweit es sich um die Ebene handelt, wird referiert und dabei werden einige kleine Ergänzungen gemacht.

*Autoreferat.*

**Thébault, V.:** Sur les points de Feuerbach. *Ann. Soc. Sci. Bruxelles A* 55, 39—44 (1935).

**Mittelstaedt:** Weiteres zur Geometrie des ebenen Vierecks. *Allg. Vermessgs-Nachr.* 47, 401—410 (1935).

Goormaghtigh, R.: Construction du polygone régulier de dix-sept côtés. *Mathesis* 49, 7—9 (1935).

Goormaghtigh, R.: Construction approchée des polygones réguliers inscrits à une circonférence donnée. *Mathesis* 49, 179—184 (1935).

● Coudere, P., et A. Balliccioni: Premier livre du tétraèdre à l'usage des élèves de première, de mathématiques, des candidats aux grandes écoles et à l'agrégation. Préface de H. Villat. Paris: Gauthier-Villars 1935. VIII, 204 pag. et 107 fig. Frs. 40.—

Ce premier livre ne se sert que de la géométrie élémentaire (les auteurs annoncent un second volume qui utilisera la géométrie analytique et l'analyse). Il donne un exposé systématique des propriétés connues du tétraèdre et y ajoute plusieurs aperçus nouveaux. Les auteurs n'ont pas reculé „devant les calculs dont l'ampleur n'était sans doute pas étrangère à l'ostracisme du tétraèdre“. Après un chapitre I, contenant des préliminaires, ils font suivre les chapitres II et III sur les trièdres (plans et droites remarquables, analogies des théorèmes de Ménélaus et de Ceva, trièdres rectangles), et les chap. IV et V sur le quadrilatère gauche (le chap. V contient l'étude des sphères tangentes aux quatre côtés dans le cas général et dans les cas particuliers). Les chap. VI, VII et VIII sont consacrés au tétraèdre quelconque. Les auteurs nous donnent la notion du „trièdre fondamental“ d'un tétraèdre, c.-à-d. le trièdre composé des trois droites, qui joignent les milieux des arêtes opposées et duquel le centre de gravité est le sommet; les caractéristiques du tétraèdre sont ramenées souvent à des particularités de ce trièdre. Le chap. VIII contient un grand nombre de relations métriques. Dans IX, X et XI est donnée une étude détaillée des propriétés du tétraèdre orthocentrique, dans XII une du tétraèdre équilatéral. Les chapitres XIII sur les tétraèdres trirectangles et réguliers, XIV sur des questions de maximum et de minimum et XV, contenant des analogies du tétraèdre et du triangle complètent l'ouvrage, qui est un exposé ample et clair de la géométrie du tétraèdre. (On ne rencontre pas les théorèmes connus sur les inégalités qui existent pour la somme des six dièdres d'un tétraèdre quelconque.) O. Bottema (Sappemeer, Holl.).

Gambier, Bertrand: Tétraèdres dont les sommets sont sur une quadrique  $\Sigma$  et dont les arêtes touchent une quadrique  $S$ . *Ann. École norm.*, III. s. 52, 1—38 (1935).

Für zwei beliebige Flächen 2. Ordnung  $S$  und  $\Sigma$  existieren stets, ohne daß eine Relation zwischen  $S$  und  $\Sigma$  stattzufinden brauchte,  $\infty^2$  Tetraeder, deren Ecken auf  $\Sigma$  liegen und deren Kanten  $S$  berühren. Will man von einem Punkte  $A$  der Fläche  $\Sigma$  ausgehend ein solches Tetraeder konstruieren, so muß man erreichen, daß die gegenüberliegende Tetraederebene  $Q$  die Flächen  $S$  und  $\Sigma$  in zwei Kegelschnitten  $c'$  und  $c$  derart schneidet, daß ein  $c$  umschriebenes und  $c'$  eingeschriebenes Dreieck existiert. Dieses Dreieck muß auch noch dem Kegelschnitt  $c''$  eingeschrieben sein, den der von  $A$  an  $S$  gelegte Tangentialkegel aus  $Q$  ausschneidet. Der erste Teil der Arbeit beschäftigt sich daher mit der Aufstellung der invarianten Gleichungen, deren Bestehen die notwendige und hinreichende Bedingung für die beschriebene Lage von drei Kegelschnitten  $c, c', c''$  ist. Mit ihrer Hilfe wird der Ort  $W$  aller Tetraederebenen  $Q$  gefunden, eine im allgemeinen nicht zerfallende Fläche 4. Klasse, welche die 2 · 4 Erzeugenden von  $\Sigma$  enthält, die  $S$  berühren. Zu einem Punkte  $A$  von  $\Sigma$  gehören 8 Ebenen  $Q$  der Fläche  $W$  und daher 8 Tetraeder, umgekehrt zu einer Ebene  $Q$  der Fläche  $W$  4 Punkte  $A$  und daher 4 Tetraeder. — Eine ausführliche Behandlung erfahren die Sonderfälle, die sich entweder durch ausgezeichnete Lage des Punktes  $A$  oder durch eine besondere Beziehung zwischen den Flächen  $S$  und  $\Sigma$  ergeben. Der Punkt  $A$  kann z. B. in einem der 16 Punkte fallen, in denen sich je zwei der  $S$  tangierenden Erzeugenden von  $\Sigma$  schneiden, und dann kann es vorkommen, daß zum Punkte  $A$   $\infty^1$  Tetraeder gehören. — Tetraeder, von denen ein Gegenkantenpaar aus Erzeugenden von  $\Sigma$  besteht. — An Sonderfällen, die sich durch eine besondere Lage der beiden Flächen ergeben, werden behandelt:  $S$  und  $\Sigma$  schneiden sich in einem Paare von Kegelschnitten, sie berühren sich längs eines Kegelschnitts, sie haben 4 gemeinsame Erzeugende, sie berühren sich in einem einzigen Punkte.

E. A. Weiss (Bonn).

Morin, Ugo: Gli automorfismi del corpo complesso ed il teorema fondamentale della geometria proiettiva. *Atti Ist. Veneto Sci. etc.* 94, 285—296 (1935).

Auf einem komplexen Grundgebilde erster Stufe werden Staudtsche Transformationen (das sind solche, die harmonische Quadrupel in harmonische Quadrupel über-



führen) konstruiert; die nicht stetig sind durch Angabe von nichtstetigen Automorphismen eines wohlgeordneten algebraisch-abgeschlossenen Unterkörpers  $P$  des Körpers aller komplexer Zahlen; die Elemente von  $P$  sind die projektiven Koordinaten im Grundgebilde.

*R. Moufang* (Frankfurt a. M.).

**Takasu, Tsurusaburo:** Ein elementarer, rein synthetischer Beweis des Schläflischen Satzes über Doppelsechse im Rahmen der Punkte, Geraden und Ebenen. Tokio Butsuri-gakko-Zasshi Nr 521, 1—10 (1935).

Der Autor beweist den Schläflischen Satz im Rahmen der Punkte, Geraden und Ebenen elementar-projektiv-geometrisch, indem er die elementare, aber metrische Methode von A. C. Dixon [Quart. J. 40 (1909)] rein projektiv verallgemeinert.

*T. Takasu* (Sendai).

**Sakellarios, Nilos:** Über Homographien zwischen zwei  $n$ -dimensionalen Räumen. Bull. Soc. Math. Grèce 16, Nr 1, 14—25 (1935) [Griechisch].

**Chisini, Oscar:** Una riga per raggiungere i punti inaccessibili. Ist. Lombardo, Rend., II. s. 68, 206—212 (1935).

Der Aufsatz behandelt die in der deutschen Literatur unter dem Namen „dreiteilige Fluchtpunktschiene“ bekannte Vorrichtung zum Verbinden von Punkten der Zeichenebene mit unzugänglichen Punkten. — Da die Arbeit keine Literaturangaben enthält ist es nicht ersichtlich, ob dem Verf. die Geschichte und Literatur [etwa R. Mehmke, Über das Einstellen der dreiteiligen Fluchtpunktschiene. Z. Math. Phys. 42, 99 (1897)] dieses Instrumentes bekannt ist.

*E. Kruppa* (Wien).

**Weyl, H.:** Elementare Theorie der konvexen Polyeder. Comment. math. helv. 7, 290—306 (1935).

Die konvexe Hülle einer Menge des  $n$ -dimensionalen affinen Raumes läßt sich bekanntlich einerseits definieren als Durchschnitt aller Halbräume, die die Menge enthalten, und andererseits als Menge der Schwerpunkte nichtnegativer Massenbelegungen der Menge. Bei der ersten Definition genügt es, die extremen Halbräume im Sinne Minkowskis und bei der zweiten die Schwerpunkte von höchstens  $n+1$  Punkten in Betracht zu ziehen. Analoges gilt im „homogenen Raume“, wo an die Stelle einer Punktmenge eine Menge vom Nullpunkt ausgehender Halbstrahlen tritt. Für die Gleichwertigkeit der beiden (verschärften) Definitionen sowohl im homogenen als auch im affinen Raum gibt Verf. einen finiten Induktionsbeweis, der dem von Carathéodory [Rend. Circ. mat. Palermo 32, 193—217 (1911)] für beliebige abgeschlossene Mengen verwandt ist. Hieraus ergeben sich unmittelbar Sätze über Systeme linearer Ungleichungen sowie einige für die Brunn-Minkowskische Theorie wichtige Eigenschaften konvexer Polyeder und linearer Polyederscharen.

*W. Fenchel* (Kopenhagen).

**Motzkin, Th.:** Sur quelques propriétés caractéristiques des ensembles convexes. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 21, 562—567 (1935).

Es sei  $E$  eine ebene abgeschlossene Menge und  $P_0$  ein äußerer Punkt.  $K(P_0)$  sei der größte Kreis um  $P_0$ , dessen Inneres keinen Punkt von  $E$  enthält. Liegt auf  $K$  nur ein Punkt von  $E$ , so wird  $P_0$  im Anschluß an Vergnères (dies. Zbl. 8, 339) als gewöhnlicher Punkt, sonst als außergewöhnlicher bezeichnet. Verf. beweist neben einigen verwandten Sätzen folgendes: Eine abgeschlossene Menge, deren sämtliche äußeren Punkte gewöhnliche Punkte sind, ist konvex. Dies wird ferner dahin verallgemeinert, daß an die Stelle der euklidischen Kreise die Kreise einer Minkowskischen Geometrie treten.

*W. Fenchel* (Kopenhagen).

**Aumann, Georg:** On a topological characterization of compact convex point sets. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 21, 358—359 (1935).

Ankündigung einer  $n$ -dimensionalen Verallgemeinerung eines Satzes von Schreier (dies. Zbl. 8, 78). Eine kompakte Menge  $P$  des  $n$ -dimensionalen euklidischen Raumes  $E_n$  wird als „point-like“ bezeichnet, wenn jeder dem „sphärischen Komplement“  $E_n^* - P$  von  $P$  angehörige Zyklus in  $E_n^* - P$  berandet. Hierbei ist  $E_n^*$  der durch einen un-

endlichfernen Punkt abgeschlossene  $E_n$ . Der fragliche Satz lautet dann: Eine kompakte Menge des  $E_n$  ist dann und nur dann konvex, wenn sie für ein ganzes  $q$  mit  $0 < q < n$  von jedem  $q$ -dimensionalen linearen Unterraum in einer Menge geschnitten wird, die point-like ist.

W. Fenchel (Kopenhagen).

**Vincensini, P.: Figures convexes et variétés linéaires de l'espace euclidien à  $n$  dimensions.** Bull. Sci. math., II. s. 59, 163—174 (1935).

Man verdankt Helly den folgenden Satz, für den Radon [Math. Ann. 83, 113 bis 115 (1921)] zuerst einen Beweis veröffentlicht hat: Haben je  $n + 1$  Körper einer beliebigen (endlichen oder unendlichen) Menge konvexer Körper des  $n$ -dimensionalen Raumes einen gemeinsamen Punkt, so haben alle Körper der Menge einen gemeinsamen Punkt. Verf. beweist einige verwandte Sätze, die sich teils aus dem Hellyschen Satz selbst, teils mit Hilfe ähnlicher Überlegungen ergeben. Es handelt sich um die Existenz von Kugeln eines festen Radius, die mit jedem konvexen Körper einer Menge Punkte gemeinsam haben, von gemeinsamen Sekanten einer Menge konvexer Körper, von gemeinsamen Halbstrahlen einer Menge konvexer Kegel mit demselben Scheitel u. ä.

W. Fenchel (Kopenhagen).

**Pleijel, A.: Über konvexe Kurven.** (Stockholm, Sitzg. v. 14.—18. VIII. 1934.) 8. Skand. Mat.-Kongr., 143—148 (1935).

Eine konvexe Kurve habe stückweise stetigen Krümmungsradius;  $R$  sei seine obere Grenze. Ferner sei  $D$  der Durchmesser,  $d$  die Dicke und  $L (\leq 2\pi R)$  der Umfang der Kurve. Dann bestehen die Ungleichungen

$$2R \left(1 - \cos \frac{L}{4R}\right) \leq d \leq D \leq 2R \sin \frac{L}{4R}.$$

Das erste und das letzte Gleichheitszeichen gelten zugleich für das symmetrische Kreisbogenzweieck. — Es seien  $L$  der Umfang,  $F$  der Flächeninhalt einer beliebigen konvexen Kurve und  $F_0$  das Minimum der Flächeninhalte ihrer Fußpunktkurven. Dann gilt für das isoperimetrische Defizit

$$3\pi(F_0 - F) \leq L^2 - 4\pi F \leq 4\pi(F_0 - F),$$

was durch Fourierentwicklung der Stützfunktion bewiesen wird. Der Beweis gestattet auch eine einfache Diskussion der Gleichheitszeichen.

W. Fenchel.

**Bilimovitch, Anton: Zur geometrischen Theorie der Invarianten eines mehrdimensionalen Affinors.** Bull. Acad. Sci. Math. Nat., Belgrade Nr 2, 81—89 (1935).

Verf. verallgemeinert seine früheren Untersuchungen über die geom. Theorie des 3-dimensionalen Affinors (Geom. Grundlagen d. Dyadenrechng. I. Dyade u. Affinor [Serbisch]. Sonderausg. d. Serb. Akad. Wiss. Belgrad 1930) auf den  $R_n$  und stellt das volle System unabhängiger Invarianten eines Affinors auf. — Die Dyade  $\{A'' A'\}$  der Vektoren  $A''$  und  $A'$  ( $\{A' A''\}$  heißt konjugierte D.) mit  $2n - 1$  unabh. Koord. heißt das Modell (d. h. eine zur gegebenen Fläche homothetische Fläche mit belieb. Homothetiezentrum und Ähnlichkeitsverhältnis) eines Hyperellipsoids, das entsteht, wenn jeder Punkt  $M$  einer Hypersphäre mit dem Zentrum  $O$  um  $\vec{MN} = A''(A', \vec{OM})$  verschoben wird, wo die Klammer das gewöhnl. skalare Produkt ist. Ist der Radius der Sphäre gleich der Länge von  $V$ , so ist der Vektor  $\vec{MN}$  das skalare Produkt  $(\{A'' A'\}V)$  der Dyade mit  $V$ . Hingegen ist  $(V\{A'' A'\}) = (\{A' A''\}V)$ . — Ein Affinor  $\Pi$  ist eine Summe von  $m$  Dyaden, wo  $m \leq n$  gemacht werden kann:  $\Pi = \{A''_\alpha A'_\alpha\}$ . (Über gleiche Indizes wird summiert.) Sind  $A_{\alpha\beta} = \{i_\alpha i_\beta\}$  die „Einheitsdyaden“, wo  $i_\alpha$  die Koord.-Einheitsvektoren sind, so ist  $\Pi = a_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha \{I'_\alpha I_\alpha\}$ , wo  $\lambda_\alpha$  Skalare und  $I_\alpha = a_{\alpha\beta} i_\beta$ ,  $I'_\alpha = a'_{\alpha\beta} i_\beta = \lambda_{\alpha\beta} I_\beta$  einfach bestimmbare Vektoren sind. Die  $\lambda_\alpha^2$  sind Wurzeln einer Säkular-Gl.; hat diese  $k$  verschwindende Wurzeln, so ist  $m = n - k$ ; sind  $p$  Wurzeln gleich, so stehen die zugehörigen Einheitsvektoren aufeinander und auf den anderen senkrecht und erfüllen einen linearen  $R_p$ . Jeder Affinor ist daher als geometrische Form bestimmt durch die  $\lambda_\alpha, \lambda_{\alpha\beta}, a_{\alpha\beta}$ . Die  $\lambda_\alpha, \lambda_{\alpha\beta}$  bilden ein volles



System von Invarianten, die vom Koord.-System unabhängig sind. Es gilt aber  $\lambda_{\alpha\mu}\lambda_{\beta\mu} = 0$  bzw. 1. Statt  $\lambda_{\alpha\beta}$  lassen sich nach Cayley die unabhängigen  $\varepsilon_{\alpha\beta}$ , wo  $\varepsilon_{\alpha\alpha} = 1$ ,  $\varepsilon_{\alpha\beta} = -\varepsilon_{\beta\alpha}$ , einführen (Verf. verweist auf einige Rechenfehler in Cayleys Arbeit „... déterminants gauches“. Papers 1, 332), die mit den  $\lambda_{\alpha\beta}$  einfach zusammenhängen. Die  $\frac{1}{2}n(n+1)$  Größen  $\lambda_{\alpha}, \varepsilon_{\alpha\beta}$  sind das volle System unabhängiger Invarianten eines Affinors. Die  $\lambda_{\alpha}$  heißen Hauptdimensionen des Affinors, das Schema der  $\varepsilon$  heißt Versor.

Bodewig (Basel).

### Algebraische Geometrie:

**Calapso, Renato:** Quadrica per nove punti. Atti Accad. Peloritana Messina 36, 91—94 (1934).

The author describes a construction for obtaining the stereographic projection of a quadric onto a plane, when nine points of the quadric, in general position, are given. The method consists in introducing a family of Hirst inversions, one of which transforms the given quadric into a plane. It is on this plane that the representation is built up.

J. A. Todd (Manchester).

**Godeaux, Lucien:** Sur les courbes canoniques. I. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 21, 481—489 (1935).

Une courbe  $C$  canonique de genre  $\pi > 2$ , non hyperelliptique, est d'ordre  $2\pi - 2$  et appartient à un  $S_{\pi-1}$ ; si  $\pi > 5$ , pour elle passent  $\frac{1}{2}(\pi - 2)(\pi - 3)$  hyperquadriques linéairement indépendantes de  $S_{\pi-1}$ , mais  $C$  n'est pas nécessairement l'intersection complète de ces hyperquadriques (cfr. F. Enriques-O. Chisini, Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche 3, 97. Bologna: Zanichelli 1924). Ici l'a. considère le cas où  $C$  est l'intersection complète des  $\frac{1}{2}(\pi - 2)(\pi - 3)$  hyperquadriques qui la contiennent, et — en raisonnant sur la courbe plane d'ordre  $\pi + 1$  (qu'il suppose douée seulement de points doubles) obtenue en projetant  $C$  à partir d'un espace  $S_{\pi-4}$  s'appuyant en  $\pi - 3$  points sur  $C$  — démontre que: La courbe  $C$  est tracée sur une surface  $F$  d'ordre  $\frac{1}{2}(\pi^2 - 5\pi + 8)$  qui, avec  $S_{\pi-4}$ , appartient à  $\pi - 3$  hyperquadriques linéairement indépendantes. La surface  $F$  est coupée par  $S_{\pi-4}$  suivant une courbe d'ordre  $\frac{1}{2}(\pi - 3)(\pi - 4)$  et de genre  $\frac{1}{2}(\pi - 4)(\pi - 5)$ . Une hyperquadrique passant par  $C$ , mais non par  $F$ , coupe encore cette surface suivant une courbe d'ordre  $(\pi - 2)(\pi - 5)$ , ce qui peut servir à construire  $C$  en partant de cette courbe.

Beniamino Segre (Bologna).

**Godeaux, Lucien:** Recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique. IV. comm. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 21, 338—344 (1935).

L'auteur, poursuivant ses recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique, considère des points unis non parfaits ayant, dans leur domaine du premier ordre, un point uni parfait, et établit les relations qui existent entre les genres arithmétiques, les genres linéaires et les invariants de Zeuthen-Segre de la surface portant l'involution et de la surface image de l'involution.

P. Dubreil (Nancy).

**Godeaux, Lucien:** Sur l'ordre des correspondances rationnelles entre deux surfaces de genres un. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 21, 345—353 (1935).

L'auteur qui a donné comme on le sait un exemple d'involution d'ordre cinq, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface de genres un ( $p_a = P_4 = 1$ ), montre ici qu'une involution d'ordre premier et de genres un est d'ordre au plus égal à 11. Il donne un exemple d'involution d'ordre 7 et de genres un appartenant à une surface de genres un et du quatrième ordre. L'existence d'une involution d'ordre 11 reste douteuse.

P. Dubreil (Nancy).

**Godeaux, L.:** Sur une surface du quatrième ordre possédant six points doubles biplanaires singuliers. Rev. mat. hisp.-amer., II. s. 10, 49—55 (1935).

Untersucht wird die Fläche  $F$  4. Ordnung

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4)^4 - x_1x_2x_3x_4 = 0,$$

die einem von einem Tetraeder und einer vierfachgezählten Ebene aufgespannten Büschel angehört. In den sechs Punkten, in denen die Kanten des Tetraeders die Ebene schneiden, besitzt die Fläche je einen biplanaren Doppelpunkt, dem ein konischer Doppelpunkt unendlich benachbart ist. Die Fläche  $F$  wird nun mit der Fläche  $\Phi$ :

$$(a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + a_3 y_3^2 + a_4 y_4^2)^2 - y_1 y_2 y_3 y_4 = 0$$

verglichen, welche die Ebenen des Tetraeders längs Kegelschnitten berührt und zwölf konische Doppelpunkte besitzt.  $\Phi$  trägt drei windschiefe Involutionen, die zusammen mit der Identität eine Involution 4. Ordnung auf  $\Phi$  bestimmen. Setzt man  $x_i = y_i^2$ , so gehen zusammengehörige Punkte von  $\Phi$  in einen Punkt von  $F$  über.  $F$  ist also das Bild der auf  $\Phi$  definierten Involution. Nun ist aber die Fläche  $\Phi$  selbst (wie der Verf. zeigte: Bull. Ac. R. de Belgique 1920) das Bild einer Involution 4. Ordnung auf einer Fläche  $\Psi$ :  $a_1 z_1^4 + a_2 z_2^4 + a_3 z_3^4 + a_4 z_4^4 - z_1 z_2 z_3 z_4 = 0$ . Also besteht zwischen  $F$  und  $\Psi$  eine Korrespondenz (1,16). Die Involution  $I_{16}$  auf  $\Psi$  wird von sechs Kollineationen von der Periode 4 erzeugt. Die Bildfläche einer einzigen dieser sechs Kollineationen wird ein doppeltgezählter Kegel.

E. A. Weiss (Bonn).

**Godeaux, Lucien:** Sur une surface à sections hyperplanes hyperelliptiques. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 4, 203—206 (1935).

**Zito, Ciro:** Un teorema sulle rigate cubiche del tipo di Cayley. Atti Accad. Peloritana Messina 36, 85—90 (1934).

Il est bien connu que les asymptotiques curvilignes d'une surface réglée du 3<sup>me</sup> ordre de Cayley sont cubiques gauches et appartiennent à des complexes linéaires. L'auteur montre par un calcul direct que les complexes en question composent un faisceau. La congruence linéaire du faisceau a comme directrices les deux directrices confondues de la surface.

S. Finikoff (Moscou).

**Wiman, A.:** Über die asymptotischen Kurven bei einer gewissen Flächengattung und ein hiermit in Zusammenhang stehendes zahlentheoretisches Problem. (Stockholm, Sitzg. v. 14.—18. VIII. 1934.) 8. Skand. Mat.-Kongr., 189—194 (1935).

Untersucht wird das Flächenbüschel (1)  $x^p w^q - y^r z^s = 0$ , wo  $p, q, r, s$  ganze rationale Zahlen ohne gemeinsamen Teiler mit  $p + q = r + s$  bezeichnen. Die Gruppe der  $\infty^2$  projektiven Transformationen  $x' : y' : z' : w' = \alpha x : \beta y : \gamma z : \delta w$  mit  $\alpha^p \delta^q - \beta^r \gamma^s = 0$  führt jede Fläche eines solchen Büschels in sich über. Zu jeder eingliedrigen Untergruppe der zweigliedrigen Gruppe gehört ein den ganzen Raum erfüllendes System von Bahnkurven ( $W$ -Kurven), die auf den Flächen des Büschels liegen:  $x : y : z : w = t^{n_1} : t^{n_2} : t^{n_3} : 1$  mit  $pn = rn_1 + sn_2$ . Die Tangenten einer  $W$ -Kurve schneiden bekanntlich die Ebenen des Fundamentaltetraeders unter konstantem Doppelverhältnis. Eines dieser Doppelverhältnisse wird:  $(3)\mu = [n_2(n - n_1)] : [n_1(n - n_2)]$ . — Werden jetzt  $n, n_1, n_2$  als homogene Punktkoordinaten in einer Bildebene gedeutet, so entsprechen den Punkten der Ebene die verschiedenen Arten von  $W$ -Kurven. Die zu den Flächen des Büschels (1) gehörigen  $W$ -Kurven werden auf die Punkte der Geraden (2) abgebildet. Für variables  $\mu$  stellt (3) ein Büschel von Kegelschnitten dar, dessen Kegelschnitte den  $\infty^1$  zum Fundamentaltetraeder gehörigen tetraedralen Komplexen entsprechen. Wie nun eine Gerade einen Kegelschnitt in zwei Punkten schneidet, so gibt es auf jeder Fläche (1) zwei Systeme von  $W$ -Kurven eines tetraedralen Komplexes. Berührt die Gerade den Kegelschnitt, so fallen die beiden Kurvensysteme zusammen und geben asymptotische Linien auf der Fläche. Den beiden Kegelschnitten des Büschels (3), welche eine vorgegebene Gerade berühren, entsprechen die beiden Systeme von Asymptotenlinien der zugehörigen Flächen (1). Die Frage, unter welchen Umständen diese Linien algebraisch sind, führt auf die zahlentheoretische Aufgabe, sämtliche Produkte von vier ganzen rationalen Zahlen  $p, q, r, s$  zu bestimmen, welche vollständige Quadrate sind, wenn sich die vier Zahlen in zwei Paare mit gleicher Summe aufteilen lassen:  $p + q = r + s$ . Für die gesuchten  $p, q, r, s$  wird eine Parameterdarstellung angegeben, in die vier willkürlich wählbare ganze rationale Zahlen eingehen.

E. A. Weiss (Bonn).



**Ciani, E.:** *Sopra un fascio sizigetico di superficie cubiche. I.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 21, 551—555 (1935).

Ein Punkt einer Fläche 3. Ordnung heißt Eckhardt-Punkt der Fläche, wenn er der Schnittpunkt von drei in einer Ebene gelegenen Geraden der Fläche ist. Seine Polarfläche 2. Ordnung zerfällt in die Ebene der drei Geraden und in eine zweite, nicht durch ihn hindurchlaufende Ebene. Diese bestimmt zusammen mit dem Eckhardt-Punkt eine perspektive Involution, der gegenüber die Fläche invariant ist. Ist eine  $F^3$  gegenüber einer windschiefen Involution invariant, so gehört eine der Involutionenachsen der  $F^3$  an, und es befinden sich auf dieser zwei Eckhardt-Punkte, deren perspektive Involutionen zusammengesetzt die windschiefe Involution ergeben. Ist schließlich die Polarfläche eines Punktes eine doppeltzählende, nicht durch den Punkt laufende Ebene, so ist die  $F^3$  invariant gegenüber einer durch den Punkt und die Ebene bestimmten Kollineation von der Periode 3. — Nach diesen Vorbereitungen wird das Büschel von Flächen 3. Ordnung:

$$\sum_1^4 x_i^3 + 6\lambda(x_2x_3x_4 + x_3x_4x_1 + x_4x_1x_2 + x_1x_2x_3) = 0$$

untersucht, das als Analogon zum syzygetischen Büschel von ebenen Kurven 3. Ordnung gelten kann. Als Resultat ergibt sich: Sämtliche Flächen des Büschels haben Eckhardt-Punkte in den sechs Eckpunkten des Vierseits, in dem die Ebene  $\sum x_i = 0$  das Koordinatentetraeder schneidet.

*E. A. Weiss* (Bonn).

**Roth, L.:** *Sulla regolarità delle superficie algebriche.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 21, 547—551 (1935).

In drei früheren Abhandlungen (dies. Zbl. 8, 220—221; 9, 323; 10, 128) hat Verf. eine Reihe von Sätzen aufgestellt, die über die Regularität einer algebraischen Fläche  $F^n$  des Raumes  $S_r$  ( $r > 3$ ) zu entscheiden gestatten. Einige dieser Sätze werden hier wiederholt und einige andere hinzugefügt. So z. B. wenn  $F$  ein rationales Büschel ebener Kurven der Ordnung  $\nu$  enthält und wenn  $4\pi \geq (n-1)(\nu-1)$  ist, wobei  $\pi$  das Schnittgeschlecht von  $F$  bedeutet, so ist  $F$  regulär; wenn  $\pi < (n-1)(\nu-1)$  ist, gehört  $F$  zur Klasse der Regelflächen. Wenn  $n = 2\pi - 2 - i$  ( $i \leq 4$ ) und  $r \geq n - \pi + 1$ ; oder wenn  $n < \pi - 1$  und  $n \leq 3(r-1)$ ; oder wenn  $2\pi - 2 > n > \pi - 1$  und  $3r = 2n - \pi + 4$ , ist  $F$  regulär oder einer Regelfläche birational äquivalent. Fall, wo  $r = 4$  ist.

*E. G. Togliatti* (Genova).

**Roth, L.:** *Some formulae for primals in four dimensions. II.* Proc. London Math. Soc., II. s. 39, 334—338 (1935).

Fortsetzung einer früheren Untersuchung desselben Verf. (dies. Zbl. 7, 226). Es werden hier die Klasse  $w$  einer  $V_3^n$  des Raumes  $S_4$  und das arithmetische Geschlecht  $p_a$  ihrer Doppelfläche wieder ausgerechnet.

*E. G. Togliatti.*

**Edge, W. L.:** *The geometry of a net of quadrics in four-dimensional space.* Acta math. 64, 185—242 (1935).

In this paper the author develops the properties of a general net  $N$  of quadrics in  $S_4$  by synthetic methods. The base curve  $C$  of the net is a canonical curve of genus five, and the Jacobian curve  $\vartheta$ , locus of vertices of cones of  $N$ , is of order 10 and genus 6, birationally equivalent to a general plane quintic. The first part of the paper deals with the polar properties of the net and the geometry of the curve  $\vartheta$ . The polar solids of an arbitrary point  $O$  with respect to the quadrics of  $N$  meet in a line  $j$ , the conjugate of  $O$  with respect to  $N$ ; an exception occurs when  $O$  lies on  $\vartheta$ , the solids then intersect in a plane meeting  $\vartheta$  in six points. One of these planes (secant planes) is thus associated with each point of  $\vartheta$ . Through each point of  $\vartheta$  there pass six secant planes, which project the lines of one half of a double-six. The lines conjugate to the points of an arbitrary line  $\lambda$  generate a cubic scroll whose directrix conics lie in the polar planes of  $\lambda$  with respect to the quadrics of  $N$ . The lines conjugate to the

points of a plane  $\pi$  generate a six-nodal cubic variety which coincides with that generated by the polar lines of the plane with respect to the quadrics of  $N$ . The locus of poles of an arbitrary  $S_3$  with respect to the quadrics of  $N$  is a sextic surface, and the lines conjugate to the points of the  $S_3$  are trisecants of this surface. The curve  $\vartheta$  possesses twenty trisecant lines, forming ten conjugate pairs with the property that the three secant planes of  $\vartheta$  associated with the points in which it meets one trisecant all pass through the conjugate trisecant. All chords of  $\vartheta$  which meet  $C$  are chords of  $\bar{C}$ , and the tangents to  $C$  at the extremities of such a chord intersect; there are 120 such lines. In the latter part of the paper the author considers the correspondence between  $\vartheta$  and a plane quintic  $\zeta$ , obtained by mapping the quadrics of  $N$  by the points of a plane, so that the cones correspond to the points of  $\zeta$ . To the quadrics of  $N$  which touch an arbitrary  $S_3$  correspond the points of a contact quartic of  $\zeta$  whose ten points of contact do not lie on a cubic. If in particular the solid joins a pair of conjugate trisecants of  $\vartheta$ , the quartic breaks up into two conics each tritangent to  $\zeta$ , and intersecting in four points of  $\zeta$ . The points of contact of either conic form a triangle whose sides meet the quintic again in nine associated points, and one cubic through these points touches the other tritangent conic at its points of contact with  $\zeta$ . The author concludes by showing that the equation of every quadric of the net can be reduced simultaneously to the form

$$\xi_1 X_1^2 + \xi_2 X_2^2 + \xi_3 X_3^2 + \tau T^2 + \eta_1 Y_1^2 + \eta_2 Y_2^2 + \eta_3 Y_3^2 = 0,$$

where  $X_i, Y_i, T$  are linear forms connected by the relations

$$X_1 + X_2 + X_3 = T = Y_1 + Y_2 + Y_3.$$

Such a reduction is in fact possible in ten ways;  $T=0$  is the equation of the solid joining a pair of conjugate trisecants of  $\vartheta$ , and  $X_i=0, Y_i=0$  represent solids containing pairs of secant planes of  $\vartheta$  which pass through these trisecants.

*J. A. Todd* (Manchester).

**Romeo, Maria:** Corrispondenze a più indici tra spazi punteggiati sghembi. Atti Accad. Peloritana Messina 36, 37—43 (1934).

Einige Bemerkungen über die Schnittmannigfaltigkeit von  $s$  algebraischen Konnexen zwischen  $t$  linearunabhängigen Räumen  $S_{h_1}, S_{h_2}, \dots, S_{h_t}$ . Das Nullsetzen einer Matrix mit  $n$  Linien und  $n+1$  Spalten wird durch eine symbolische Gleichung ausgedrückt.

*E. G. Togliatti* (Genova).

**Villa, Mario:** Sulle varietà iperalgebriche semplicemente infinite. Boll. Un. Mat. Ital. 14, 160—165 (1935).

Für eine  $\infty^1$  hyperalgebraische Mannigfaltigkeit  $V_1$  („Faden“) wird hier der Begriff der Wertigkeit eingeführt. Eine irreduzible  $V_1$  gehört einer wohlbestimmten algebraischen Kurve  $C_1$  an und bestimmt auf  $C_1$  eindeutig eine gewisse involutorische hyperalgebraische Korrespondenz  $\Gamma$ ; wenn die Punktgruppen, die vermöge  $\Gamma$  den verschiedenen Punkten von  $C_1$  entsprechen, einer Linearschar angehören, so wird  $V_1$  ein Faden mit Wertigkeit genannt. Die irreduziblen Fäden mit Wertigkeit erhält man als vollständige Durchschnitte (eine endliche Anzahl von Punkten ausgenommen) einer irreduziblen algebraischen Kurve  $C_1$  mit einer irreduziblen hyperalgebraischen Hyperfläche; als partielle Durchschnitte erhält man die Fäden ohne Wertigkeit. Als Anwendung eine Bedingung für die Rationalität einer Kurve. Und schließlich ein Modell eines Wertigkeitsfadens.

*E. G. Togliatti* (Genova).

**Zappalà, A.:** Connesso sferico. Atti Accad. Peloritana Messina 36, 95—100 (1934).

Les variétés conoïdes sont ici considérées — d'une façon très superficielle — en relation au connexe involutif, nommé par l'a. sphérique, qu'on obtient en associant deux points d'un  $S_n$  euclidien lorsqu'ils ont une distance assignée.

*Beniamino Segre* (Bologna).



## Differentialgeometrie:

**Busemann, Herbert, und Willy Feller:** Bemerkungen zur Differentialgeometrie der konvexen Flächen. I. Kürzeste Linien auf differenzierbaren Flächen. Mat. Tidsskr. B 1935, 25—36.

Definitionen: Eine ebene Kurve  $k$  besitze in ihrem Punkte  $P$  eine rechte Halbtangente  $t$ .  $Q$  sei ein von rechts auf  $k$  gegen  $P$  strebender Punkt,  $K(Q)$  der Kreis, der  $t$  in  $P$  berührt und durch  $Q$  geht,  $r(Q)$  der Radius von  $K(Q)$ . Dann heiße  $\limsup_{Q \rightarrow P} \frac{1}{r(Q)}$  die obere rechte Krümmung von  $k$  in  $P$ . — Eine konvexe differenzierbare Fläche heiße von der Klasse  $E$ , wenn jeder Normalschnitt im Ausgangspunkt endliche rechte und linke obere Krümmung hat. Sie heiße von der Klasse  $R$ , wenn alle diese verallgemeinerten Normalkrmmungen  $\frac{1}{R}$  nicht übertreffen. — Verff. beweisen nun in einer anderen, demnächst erscheinenden Arbeit, daß jedes Punktepaa einer beliebigen konvexen Fläche eine kürzeste Verbindung besitzt, und daß die kürzesten Linien überall dort Tangenten haben, wo die Fläche differenzierbar ist. In der vorliegenden Arbeit wird demgegenüber gezeigt: 1. Aus jenen Ergebnissen folgt nicht, daß durch jedes Linienelement der Fläche eine kürzeste Linie geht; es wird nämlich sogar eine Fläche der Klasse  $E$  angegeben (brigens durch ein sehr einfaches anschauliches Verfahren), auf der es ein Linienelement gibt, durch das keine kürzeste Linie geht. 2. Ist dagegen  $F$  eine Fläche der Klasse  $R$ , so geht durch jedes Linienelement von  $F$  eine und nur eine kürzeste Linie, und wenn zwei Punkte von  $F$  mehr als eine kürzeste Verbindung haben, so sind deren Längen mindestens  $\pi R$ . Der Beweis von 2. wird mittels Approximation durch analytische Flächen durchgeführt. Hierbei ergeben sich eine Reihe von Ungleichungen und Grenzübergängen, die nach Ansicht des Ref. an und für sich interessant sind.

Cohn-Vossen (Moskau).

**Segre, Beniamino:** Il teorema di Meusnier nella geometria differenziale degli insiemi. Mem. Accad. Ital. 6, 1205—1220 (1935).

Bekanntlich hat Bouligand den Meusnierschen Satz unter etwas allgemeineren Voraussetzungen als den üblichen bewiesen [J. Math. pures appl., IX. s. 11 (1932); dies. Zbl. 4, 366; die im „Supplément“ hierzu, dies. Zbl. 6, 27, gegebene Verallgemeinerung ist nach Segre nicht korrekt; die Voraussetzungen sind angegeben dies. Zbl. 3, 320; für die weiteren Publikationsstellen vgl. dies. Zbl. 5, 113, 375; 10, 373; 11, 98]. Verff. bemerkt nun mit Recht, daß dieser Beweis insofern dem Programm der „direkten Differentialgeometrie“ nicht entspricht, als er analytischer Natur ist und überdies unnötige Voraussetzungen einfhrt. In der vorliegenden Arbeit wird daher der Satz unter wesentlich allgemeineren Voraussetzungen bewiesen, und zwar durch einfachste und rein geometrische Betrachtungen. Hier möge es genügen, das Resultat für Flächen auszusprechen: Die Fläche  $\Phi$  habe im Punkte  $O$  eine ebene Paratingens, und es sei  $k$  ein von  $O$  ausgehender Bogen auf  $\Phi$  mit der Halbtangente  $t$  in  $O$ . Wenn dann  $k$  in  $O$  eine endliche (einseitige) Krümmung hat, dann haben auch die übrigen Bögen mit der Halbtangente  $t$  endliche Krümmungen, und zwischen diesen besteht die Meusniersche Beziehung. Die Krümmung wird dabei definiert vermöge der Kreise mit der Tangente  $t$  in  $O$ , die durch einen weiteren Kurvenpunkt gehen. — Es sei hierzu bemerkt, daß dieser Satz unter etwas schärferen Voraussetzungen (stetige Tangentialebene) bereits von Hjlmslev bewiesen wurde [Mém. Acad. Sci. Let. Danemark, VII. s. 12 (1914); Dänisch], und der Beweis überträgt sich unmittelbar auf den hier behandelten Fall. Die Beweise sind im wesentlichen quivalent, doch spielt bei dem Hjlmslevschen der Fall eines verschwindenden Krümmungsradius keine Sonderrolle; außerdem zeigt er, daß der Satz bereits für die obere und untere Krümmung gilt. (Dieser Beweis wird beiläufig mit ausgeführt in einer in den Acta math. erscheinenden Arbeit von Busemann und dem Ref.)

W. Feller (Stockholm).

**Jonas, Hans:** Über die Verallgemeinerung des in der Biegungstheorie der Flächen zweiten Grades auftretenden intrinsiken Transformationsprozesses *H. Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig* **87**, 41—78 (1935).

Vgl. dies. Zbl. **5**, 307, **6**, 28 und **9**, 374 sowie die Arbeiten des Verf.: S.-B. Berlin. math. Ges. **24**, 54 (1925) und **29**, 34 (1930). Der in diesen Arbeiten entwickelten geometrischen Theorie wird eine Reihe neuer Ergebnisse hinzugefügt; im einzelnen muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden. *Cohn-Vossen* (Moskau).

**Vakselj, Anton:** Ein Existenztheorem in der Theorie der Flächenverbiegung für den Fall nichtanalytischer Funktionen. *Publ. Math. Univ. Belgrade* **3**, 179—194 (1934).

Vgl. dies. Zbl. **8**, 322. Es wird nachgewiesen, daß das Cauchyproblem der Biegungstheorie (dem Verf. eine andere, aber äquivalente Formulierung gibt) bei Flächen nichtpositiver Gaußscher Krümmung auch im nichtanalytischen Fall sich hinsichtlich seiner Lösbarkeit so verhält wie im analytischen Fall, wenn nur die erste Fundamentalform der Fläche stetige Ableitungen bis zur 5. Ordnung hat, wenn ferner die geodätische Krümmung der ausgezeichneten Flächenkurve viermal nach der Bogenlänge stetig differenzierbar ist, und wenn endlich Krümmung und Torsion der vorgegebenen Raumkurve dreimal stetig nach der Bogenlänge differenzierbar sind. *Cohn-Vossen*.

**Calapso, Renato:** Sulla conica di Kommerel nella teoria delle superficie di un  $S_4$ . *Atti Accad. Peloritana Messina* **36**, 45—52 (1934).

Dans ce travail l'a. donne quelques propriétés élémentaires (en partie connues) des centres et des lignes de courbure d'une surface non développable de l'espace ordinaire, propriétés qu'après il transporte aux surfaces de  $S_4$ . *Beniamino Segre*.

**Calapso, R.:** Intorno ad un teorema di B. Segre. *Boll. Un. Mat. Ital.* **14**, 153—157 (1935).

On sait qu'afin que le réseau appartenant à une surface  $F$  non développable d'un  $S_4$  euclidien soit orthogonal il est nécessaire et suffisant que, en chaque point de  $F$ , la conique de Kommerel relative soit décomposée en deux droites [cfr. B. Segre, *Rend. Semin. mat. Roma*, II. s. **7**, partie II (1931); ce Zbl. **5**, 19]. Cette proposition est ici colliguée avec certaines propriétés des droites normales — dans le sens de Guichard — aux réseaux  $O$  de  $S_4$ . *Beniamino Segre* (Bologna).

**Pinl, M.:** Quasimetrik auf totalisotropen Flächen. (III. Mitt.) *Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc.* **38**, 171—180 (1935).

Vgl. dies. Zbl. **6**, 78 und **7**, 131. Die Einordnung jener Flächen in die Finsler-Berwaldsche Krümmungstheorie wird zu Ende geführt, wobei Verf. sich auf invariantentheoretische Ergebnisse von G. F. C. Griß (dies. Zbl. **9**, 410) stützt. Die biquadratische Grundform der Flächen hat nach Griß 4 Differentialinvarianten 1. Ordnung, und Verf. zeigt u. a., daß deren gleichzeitiges identisches Verschwinden den Fall kennzeichnet, daß die Grundform in geeigneten Parametern konstante Koeffizienten bekommt; das bedeutet, daß die betrachtete totalisotrope Fläche eine allgemeine Minakowskische Fläche in der Terminologie jener Krümmungstheorie ist. *Cohn-Vossen*.

**Fabbri, M. Renata:** Sui differenziali d'ordine superiore. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. **21**, 543—546 (1935).

Wenn  $d \dots d \xi^{\nu} = 0$  ( $p = 1, \dots, m$ ), so ist  $D \xi^{\nu}$  ein Vektor, wenn  $D$  mittels Alternation von zwei Symbolen im Produkte  $d \dots d$  entsteht. — Dieser Satz wird auf die Pérèssche Behandlung [*Rend. Lincei* **29**, 134—138 (1920)] der Form

$$\frac{d^2}{1} a_{\lambda\mu} \frac{d \xi^{\lambda}}{2} \frac{d \xi^{\mu}}{2} - 2 \frac{d}{21} d a_{\lambda\mu} \frac{d \xi^{\lambda}}{2} \frac{d \xi^{\mu}}{1} + \frac{d^2}{2} a_{\lambda\mu} \frac{d \xi^{\lambda}}{1} \frac{d \xi^{\mu}}{1}$$

angewandt.

*Hlavatý* (Praha).

**Bompiani, E.:** Geometrie riemanniana di specie superiore. *Mem. Accad. Ital.* **6**, 269—520 (1935).

Die Deformation, welche den Bogen und die ersten  $\nu - 1$  Krümmungen ( $\nu = 1, 2, \dots$ ) jeder beliebigen Kurve auf einer  $V_m$  in  $R_n$  ( $m < n$ ) reproduziert, heißt „Deformation  $\nu$ -ter Art“. (Für  $\nu = 1$  reproduziert sich nur der Bogen.) Die Geometrie der gegen-



über diesen Deformationen invarianten Eigenschaften wird mittels der differential-invarianten Formen  $A_{(\mu)}^2 \equiv A_{r_1 \dots r_\mu s_1 \dots s_\mu} du^{r_1} \dots du^{s_\mu}$  ( $\mu = 1, \dots, \nu$ ) beherrscht. Hier ist  $A_{r_1 \dots r_\mu s_1 \dots s_\mu} = A_{r_1 \dots r_\mu s_1 \dots s_\mu}$  ( $\mu = 2, \dots, \nu$ ) und  $A_{r_1 \dots r_\mu}$  sind Affinoren (welche mit der Entfernung eines zum Punkte  $P$  der  $V_m$  benachbarten Punkte von dem Oskulationsraum  $S(\mu - 1)$  des Punktes  $P$  zusammenhängt). Die Formel  $B_{r_1 \dots r_\nu s_1 \dots s_\nu h k} = A_{r_1 \dots r_\nu h s_1 \dots s_\nu k} - A_{r_1 \dots r_\nu k s_1 \dots s_\nu h}$  ist dann eine direkte Verallgemeinerung des Gaußschen „Theorema egregium“. Die Affinoren  $A$  haben verschiedene Anwendungen, von welchen die folgende für  $\nu = 2$  als Beispiel zitiert werden soll: Das Quadrat der Krümmung einer Geodätischen in der Richtung  $d$  auf  $V_m$  ist  $A_{r_1 r_2 s_1 s_2} du^{r_1} du^{r_2} du^{s_1} du^{s_2}$ . Außerdem dienen diese Affinoren zur Konstruktion der verallgemeinerten Christoffelschen Symbole. Die Rechnung wird überall so geführt, daß auch der nichtnormale Fall [= der Fall, wo der Oskulationsraum  $S(\nu)$  nicht höchst-dimensional ist] mitbegriffen wird. — Ein Vektor  $v$  der  $\nu$ -ten Art wird im normalen

Falle folgendermaßen definiert:  $v = \sum_{\mu=1}^{\nu} v^{r_1 \dots r_\mu} \frac{\partial^\mu x}{\partial u^{r_1} \dots \partial u^{r_\mu}}$ . Dabei sind  $v^{r_1 \dots r_\nu}$  so-

wie auch die Projektion  $v^{r_1 \dots r_{\nu-k}}$  vom  $v$  auf  $S(\nu - k)$  Tensoren (symmetrische Affinoren)

im üblichen Sinne. — Die Übertragungslehre kann entweder nach Levi-Civita sofort verallgemeinert werden (Bortolotti) oder aber kann von anderen Algorithmen Gebrauch gemacht werden. Selbstverständlich wird immer verlangt, daß die Art des übertragenen Vektors durch die Übertragung nicht geändert wird. Verschiedene Algorithmen der Übertragung werden diskutiert und untersucht. Als Beispiel soll die Übertragung erwähnt werden, bei welcher noch andere projektive Eigenschaften (neben der Art) des Vektors beibehalten werden. — Der Fall  $m = 2$  wird separat und gründlich behandelt, wobei die wohlbekannten Bompianischen Symbole  $[h k l p] = \frac{\partial^{h+k} x}{\partial u^h \partial v^k} \cdot \frac{\partial^{l+p} x}{\partial u^l \partial v^p}$  benützt werden. Außerdem werden in diesem Falle  $m = 2$

auch verwandte Fragen gelöst, z. B.: Man hat zwei  $\nu$ -äquivalente Flächen (due superficie applicabili di specie  $\nu$ ). Wann ist es möglich, der einen Fläche eine Regelfläche so umzuschreiben, daß diese letzte mit der analog konstruierten Regelfläche (mit Hilfe der anderen Fläche)  $\nu$ -äquivalent ist? — Außerdem werden auch verschiedene geometrische Kriterien für die  $\nu$ -Äquivalenz aufgestellt und diskutiert und der Zusammenhang der Deformation  $\nu$ -ter Art mit verschiedenen Transformationen (Peterson, Laplace) untersucht. — Dieses Buch öffnet den dritten Weg, der mit den zwei in letzter Zeit eingeschlagenen (Diracsche Theorie, Berwaldsche Räume) für die mehrdimensionale Differentialgeometrie neue „Lebensmöglichkeiten“ darbietet. — Inhaltsverzeichnis: I. Premessa proiettiva sulle superficie integrali di equazioni lineari a derivate parziali. II. Deformazioni di specie superiore delle superficie. Fondamenti analitici. III. Proprietà proiettive delle deformazioni. IV. Teoria invariantiva delle geometrie riemanniane di specie superiore. *Hlavatý (Praha).*

**Mira Fernandes, A. de:** Derivazione tensoriale composta negli spazii non puntuali. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 21, 555—562 (1935).

Der Fundamentaltensor  $g_{\lambda\mu}$  wird als Funktion der Variablen  $\xi^\nu$ , eines Vektorfeldes  $v^\nu$  und eines Affinorfeldes  $u_{\lambda\mu}$  vorausgesetzt. Aus dem Ansatz

$$\delta X^\nu = dX^\nu + \Gamma_{\lambda}^{\nu}{}_{\mu} d\xi^\mu X^\lambda + C_{\lambda}^{\nu}{}_{\mu} d\xi^\mu dv^\lambda + E_{\lambda}^{\nu\omega\mu} X^\lambda du_{\omega\mu};$$

$$\delta g_{\lambda\mu} X^\lambda X^\mu = 0, \quad \text{wenn} \quad \delta X^\nu = 0,$$

für einen Vektor  $X^\nu$  folgt

$$\frac{\partial}{\partial \xi^\mu} g_{\lambda\nu} = 2\Gamma_{(\lambda\nu)\mu}; \quad \frac{\partial}{\partial v^\mu} g_{\lambda\nu} = 2C_{(\lambda\nu)\mu}; \quad \frac{\partial}{\partial u_{\omega\mu}} g_{\lambda\nu} = 2E_{(\lambda\nu)}^{\omega\mu}.$$

Aus diesen Formeln erhellt sofort, daß  $C$  und  $E$  Affinoren sind. Analoge Betrachtungen gelten auch, wenn man statt  $u_{\lambda\mu}$  ein Vektorfeld  $w^\nu$  nimmt. (Zu vgl.: Cartan, Les espaces de Finsler; dies. Zbl. 8, 418.) *Hlavatý (Praha).*

**Yano, Kentaro:** On the metric space  $K_n$ . Proc. Phys-Math. Soc. Jap., III. s. 17, 163—169 (1935).

[Vgl. von demselben Verf.: On the linear displacement in the generalized manifold. Proc. Phys.-Math. Soc. Japan 16, 318—326 (1934), und On the theory of linear connections in the manifold admitting homogenous contact transformations. Proc. Phys.-Math. Soc. Japan 17, 39—47 (1935); vgl. dies. Zbl. 10, 38 u. 420.] Als Element wird ein Punkt  $\xi^v$  mitsamt eines Vektors  $u_\lambda$  eingeführt. Jede infinitesimale homogene Berührungstransformation ist dann mittels

$$\bar{\xi}^v = \xi^v + \frac{\partial C}{\partial u_\lambda} dt, \quad \bar{u}_\lambda = u_\lambda - \frac{\partial C}{\partial \xi^\lambda} dt$$

definiert, wo  $C$  homogen erster Ordnung in  $u_\lambda$  ist. Die Metrik wird mittels  $g^{\lambda\nu} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial u_\lambda \partial u_\nu}$  beschrieben und die Konnexion mittels Gleichungen der Form

$$\delta X^\nu = dX^\nu + \Gamma_{\lambda\mu}^\nu d\xi^\mu X^\lambda + X^\lambda \Lambda_{\lambda}^\mu d u_\mu$$

eingeführt (vgl. auch die vorst. ref. Arbeit von Mira Fernandez sowie auch das dort zitierte Buch von Cartan). Die Koeffizienten  $\Gamma, \Lambda$  werden mit Hilfe von zwei Bedingungen festgelegt:  $\delta g_{\lambda\mu} = 0$  und  $\delta X^\lambda X_\lambda = (\delta X^\lambda) X_\lambda + (\delta X_\nu) X^\lambda$  für  $d\xi^\nu = 0$ .

Für den Winkel  $d\varphi$  von  $u_\lambda$  und  $u_\lambda + d u_\lambda$  ergibt sich die Formel  $d\varphi^2 = \frac{1}{C} \frac{\partial^2 C}{\partial u_\lambda \partial u_\mu} d u_\lambda d u_\mu$ .

Diese Resultate werden auf Kurven angewandt.

Hlavatý (Praha).

**Hosokawa, Tōyomon:** On the geometry in microscopic and macroscopic space. Proc. Imp. Acad. Jap. 11, 165—167 (1935).

Ausgehend von den quadratförmigen Matrizen  $E_\lambda$  mit 16 Elementen, die der Bedingung  $E_\lambda(E_\mu) = \delta_{\lambda\mu}(\rho, \mu, \lambda, \nu = 1, \dots, 5)$  genügen, werden Matrizen  $a_\lambda = p_{\lambda}^{-1} E_\nu$ ,  $a^\nu = p_{\lambda}^{\lambda} E^\lambda$  ( $E_\lambda = E^\lambda$ ) konstruiert. Speziell wird hier

$$p_i^{\cdot 5} = 0, \quad p_5^{\cdot 5} = 1, \quad p_i^{\cdot 5} = \Phi^i, \quad p_{\cdot 5}^{-1} = \varphi^i \quad (i, j, k, l = 1, \dots, 4)$$

gesetzt. Die „kinematische“ Transformation der Variablen soll dann in der Form

$$\bar{\xi}^5 = \xi^5, \quad \bar{\xi}^i = \xi^i(\xi^1, \dots, \xi^5)$$

angenommen werden. Setzt man  $S_b^a = \delta_b^a + \varepsilon^e I_{be}^a$  ( $a, b = 6, 7, 8, 9$ ) und  $S_{a\mu} S = \bar{a}_\mu$ , so ergibt sich (bis auf Größen höherer Ordnung)

$$\bar{a}_\mu = a_\mu + \varepsilon^e (-I_e a_\mu + a_\mu I_e).$$

Neben den Matrizen  $I_e$  mit den Elementen  $I_{be}^a$  werden noch Koeffizienten  $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$  mittels

$$\Gamma_{\mu e}^\lambda a_\lambda = \frac{\partial}{\partial \xi^e} a_\mu + \Gamma_e a_\mu - a_\mu \Gamma_e$$

eingeführt, so daß  $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$  bzw.  $\Gamma_{b\mu}^a$  die Konnexionskoeffizienten in der makroskopischen bzw. mikrokosmischen Raum-Zeit darstellen, und es ist

$$V_e a_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial \xi^e} a_\mu - \Gamma_{\mu e}^\lambda a_\lambda + \Gamma_e a_\mu - a_\mu \Gamma_e = 0.$$

Wenn nun  $\psi$  die Lösung der (linearisierten) Diracschen Gleichung ist, so kann man die „mikroskopische Metrik“ mittels  $a_i d\xi^i \psi = ds \psi$  einführen, während aus dieser Gleichung  $a_{(i} a_{j)} d\xi^i d\xi^j \psi = ds^2 \psi$  folgt. Unter Voraussetzung, daß diese Gleichung mit jedem Spinvektor  $\psi$  befriedigt wird, bekommt man also die „makroskopische“ Metrik  $g_{ij} d\xi^i d\xi^j = ds^2$  ( $a_{(i} a_{j)} = g_{ij}$ ).

Hlavatý (Praha).

**Kawaguchi, Akitsugu:** Displacements in a manifold of matrices. II. Proc. Imp. Acad. Jap. 11, 168—170 (1935).

(Vgl. Zbl. 9, 131; 11, 132.) Bei der Transformation  $\bar{A} = \varrho A$  übergeht  $\Gamma(A)$  in

$$\bar{\Gamma}(A) = A d \log \varrho + \Gamma(A). \quad (1)$$

Die Matrix

$$A(A) = \Gamma(A) + A f(\Gamma, A) \quad \text{wo} \quad f \equiv \Phi(\Pi, A) - \frac{\psi(\Gamma, A)}{\psi(A, A)}$$



ist mittels  $f(A, A) = 0$  charakterisiert und bei (1) invariant. Dabei ist  $\Phi$  eine beliebige Funktion von  $A$  und  $\Pi \equiv ((I_j^i A_i^k - I_i^k A_j^i))$  (mit einigen Nebenbedingungen),  $\psi$  beliebige linear homogene Funktion von  $I$  mit  $\psi(A, A) \neq 0$ . Es wird auch die Transformationsweise von  $A$  in bezug auf die Transformationsgruppe  $'A = VAW$  angegeben.  
*Hlavatý (Praha).*

## Astronomie und Astrophysik.

**Zagar, F.:** Sull'orbita di un terzo corpo invisibile in un sistema binario. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 21, 508—515 (1935).

The author gives a discussion of the motions in binary systems containing a third invisible body. The paper is connected with a recent memoir by Nobile (see this Zbl. 10, 87) on the utilization of measurements of radial velocities for the study of the dynamics of stellar systems.  
*Steensholt (Oslo).*

**Krat, W.:** On the determination of the orbital elements of eclipsing binaries. I. Russ. astron. J. 11, 407—411, u. engl. Text 412—414 (1934) [Russisch].

Verf. gibt eine Methode an, nach der es in einfacher Weise möglich ist, die Elemente eines Bedeckungsveränderlichen aus der Lichtkurve zu berechnen, auch in dem relativ schwierigen Fall partieller Bedeckung bei ellipsoidischen Komponenten. Die üblichen Fundamentalgleichungen zwischen der relativen scheinbaren Entfernung der Zentren der Komponenten, der Bahnlänge von der Mitte der Bedeckung gerechnet und dem aus der Lichtkurve berechenbaren relativen bedeckten Areal werden so kombiniert, daß die Auflösung zwecks Ermittlung der Bahnelemente unter Benutzung einer beigegebenen Hilfstafel leicht auf graphischem Wege durchgeführt werden kann. Die Methode ist sowohl zur Berechnung der der Annahme gleichmäßig leuchtender Sternscheiben entsprechenden Lösungen wie der Lösungen, die der Annahme gegen den Rand verdunkelter Sternscheiben entsprechen, geeignet.  
*Benqt Strömgren.*

**Krat, W.:** A note on the spectroscopic determination of stellar rotation. Astron. Nachr. 256, 101—106 (1935).

This paper contains comments on Carroll's method of determining the speed of rotation of a star from the observed profiles of its spectral lines (this Zbl. 7, 133), in particular with regard to "secondary" distortion of the profile, and also with regard to the use of an error law profile in place of the directly observed profile. The author's results of applying the theory to the spectrum of  $\alpha$  Aquilae are recorded. The possibility of deriving the speed of rotation of the components of an eclipsing binary from the displacement of their spectral lines during the time of eclipse is briefly discussed.

*W. H. McCrea (London).*

**Pannekoek, A.:** Theoretical colour temperatures. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 95, 529—535 (1935).

The Greenwich determinations of colour temperatures of stars, after the last comparisons with new absolute standards, gave the startling result of colour temperatures of  $18000^\circ$  to  $20000^\circ$  for A stars, which, though agreeing with other investigations, contradicts the general conviction that the stars radiate nearly as black bodies of the corresponding effective temperature. The present paper is concerned with a theoretical discussion of these observations. A theory is developed, which in a first approximation is able to explain the Greenwich results. However, there are still notable discrepancies (thus, for the sun, the difference between effective temperature and colour temperature is given by theory in the wrong direction). — The paper makes use of some calculations on the continuous absorption coefficients, details of which are not given but reserved for a future publication of the whole investigation; in the present paper, only foundations and chief results are given.  
*Steensholt (Oslo).*

**Kalmár, L. v.:** Zur Hydrostatik der Sterne. Astron. Nachr. 256, 75—76 (1935).

Die früheren Arbeiten des Verf. über Sternmodelle mit veränderlichem Polytropen-

index (vgl. dies. Zbl. 9, 237 u. 10, 86) werden durch weitere Betrachtungen über den Verlauf von Druck, Dichte, Temperatur, Nettostrom usw. längs des Radius ergänzt. *Klauder.*

**Durand, Georges:** Sur la précision de la relation masse-luminosité d'Eddington. C. R. Acad. Sci., Paris 200, 1915—1918 (1935).

The author has re-determined the constants in Eddington's mass-luminosity relation, using a larger number of stars than in Eddington's original determination, and performing a least-square solution. He finds that Eddington's values are in excellent agreement with the newly determined ones. *W. H. McCrea* (London).

**Fairclough, N.:** The external radii of stars of the generalised standard model. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 95, 585—600 (1935).

Die Arbeit stellt eine Ergänzung der Milneschen Theorie des Sternaufbaus dar (vgl. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 91, 33; 92, 610; dies. Zbl. 4, 421). Verf. gibt darin eine numerische Auswertung der von M. abgeleiteten Formeln für den äußeren Radius eines Sterns für verschiedene Werte der Gesamtmasse. *Klauder* (Jena).

**Chandrasekhar, S.:** An analysis of the problems of the stellar atmospheres. Russ. astron. J. 11, 550—596 (1934).

This paper gives a comprehensive survey of the present state of the theory of stellar atmospheres in all its main aspects. One cannot here enumerate all the topics discussed, but the following are the chapter headings, and a few of the more novel subjects dealt with: I. The photosphere and the problem of the continuous spectrum of a star. Extended photospheres and their effect in transferring energy into the ultra-violet region of the spectrum. II. The reversing layer and the problem of the absorption lines of a star. III. The problem of the chromosphere. Outline of the author's "hydrodynamical solution" of the equations of selective radiative support. IV. The problem of the emission lines. Zanstra's theory of nebular luminosity, and an outline of the accurate solution of the corresponding equations of radiative equilibrium. In addition to the subjects explicitly mentioned, the more usual ones are also discussed, and an adequate introduction to the mathematical methods used in dealing with them is given. Each chapter is supplied with a short bibliography. The paper contains a chart giving a classification of the problems of stellar atmospheres, showing their natural physical subdivisions, and the appropriate physical hypotheses and mathematical theories which have been employed in developing the corresponding theories. *W. H. McCrea* (London).

**Mineur, Henri:** La magnitude absolue des étoiles *B* à raies d'émission. C. R. Acad. Sci., Paris 200, 2145—2147 (1935).

Für die im Katalog von P. W. Merrill und C. G. Burwell [Astrophys. J. 78, 87 (1933)] enthaltenen *B*-Sterne mit hellen Wasserstofflinien, deren Radialgeschwindigkeiten und Eigenbewegungen bekannt sind, werden unter Berücksichtigung der von der galaktischen Rotation herrührenden Glieder die mittleren absoluten Helligkeiten von 5 spektralen Untergruppen abgeleitet. Es ergibt sich im Mittel kein Unterschied in der Leuchtkraft gegenüber den entsprechenden normalen *B*-Sternen, im Gegensatz zu der Ansicht von Gerasimovič [Harvard Observ. Bull. 849 (1927)], daß die *B*-Sterne zu den Übergiganten zu rechnen seien. *Wempe* (Göttingen).

**Hnatek, A.:** Über relativistisch vollständig entartete Modelle weißer Zwerge mit vorgegebener Verteilung der Energiequellen. Astron. Nachr. 256, 93—100 (1935).

The paper gives a discussion of degenerate stellar models in analogy with the recent work of Toshima Araki [Z. Astrophys. 8, 358 (1934); this Zbl. 9, 415 (1935)]; the energy generation is, in accordance with Araki, assumed to be given by the expression

$$1 - \frac{k\varepsilon}{4\pi cG} = B(\varrho_0/\varrho)^{\sigma},$$

where *B* is a constant and the other symbols have their usual meanings. Araki carried through his calculations on the assumption of ordinary nonrelativistic degeneracy; the present author considers the case of relativistic degeneracy. *Steensholt* (Oslo).



**McCrea, W. H.:** Gas motions in prominences, Wolf-Rayet stars and novae. *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **95**, 509—519 (1935).

In den Protuberanzen sowie in den Nebelhüllen, die Wolf-Rayet-Sterne und Novae umgeben, hat man es mit strömenden Gasmassen zu tun. Auf den Atomen verschiedener Elemente in diesen Gasmassen wirken im allgemeinen verschieden große Kräfte. Verf. untersucht die Bedingungen dafür, daß die verschiedenen Elemente trotzdem näherungsweise zusammenhalten, d. h. sich mit annähernd gleich großen Geschwindigkeiten bewegen. Es wird das mathematische Problem der Bewegung eines Gases durch ein anderes unter gewissen vereinfachenden Annahmen über die Natur der Zusammenstöße der Atome diskutiert. Die Ergebnisse werden zur Diskussion der oben erwähnten astrophysikalischen Probleme herangezogen. Indem Verf. für die Protuberanzen und für die in Frage kommenden Nebelhüllen plausible Werte der Dichte ansetzt, findet er, daß in der Tat in den betreffenden Gasmassen die Elemente im allgemeinen näherungsweise zusammenhalten, in Übereinstimmung mit der Erfahrung. Zum Schluß werden Richtlinien für einen weiteren Ausbau der Theorie gegeben. *Benkt Strömgren.*

**Lundmark, Knut:** On the novae and their classification among the variable stars. (*Stockholm, Sitzg. v. 14.—18. VIII. 1934.*) 8. Skand. Mat.-Kongr., 356—375 (1935).

The author first discusses a variety of statistical properties of novae. For example, after studying their distribution in the Milky Way, he concludes that the nova-phenomenon is not associated with any particular class of stars, but with the stars in general. Further, from the number of novae in the Milky Way having initial or final magnitude above any given value, he concludes that one and the same star has to pass the nova-stage several times in its career. This conclusion, if correct, means that the novae have to be classed among the variable stars. The second part of the paper is an attempt to carry out such a classification, based chiefly on E. A. Milne's theory of the energetics of non-steady thermal states (this Zbl. **8**, 279). *W. H. McCrea.*

**Mohr, J.-M.:** Études sur les conséquences de la théorie de la rotation simple de la galaxie. *Bull. Astron.*, II. s. **9**, 1—39 (1934).

Die Arbeit behandelt verschiedene quantitative Eigentümlichkeiten der beobachteten Raumgeschwindigkeiten der Sterne in ihrer Beziehung zur Oort-Lindblad'schen Rotationstheorie. Folgende Voraussetzungen werden akzeptiert: 1. Länge des galakt. Zentrums  $l_0 = 327^\circ$  (Shapley). 2. Rotationsgeschwindigkeit der Sonne  $= 300$  km/sec in der Richtung  $l = 55^\circ$ ,  $b = 0^\circ$  (Strömberg). 3. Die auf Grund von 2. sich ergebende Rotationsgeschwindigkeit von 1160 Riesensternen der Typen *B, A, F, G, K, M*  $= 289,13$  km/sec in der Richtung  $l = 56^\circ$ ,  $86^\circ$ ,  $b = 0^\circ$  wird als Kreisbahngeschwindigkeit am Sonnenort angesehen. — Die Verteilung der Bewegungsrichtungen der Riesen *B—M* um die Kreisbahnrichtung ergibt sich nahezu als Normalverteilung. Die Zwerge haben durchweg größere Exzentrizitäten als die Riesen desselben Spektraltyps. Bei den Typen *F, G, K* entspricht zunehmender Exzentrizität abnehmende Masse. Die Neigungen der Bahnen gegen die galaktische Ebene sind im allgemeinen um so kleiner, je kleiner die Bahnexzentrizitäten sind. Die Sterne hoher Geschwindigkeit weisen besonders große (Mittel 0,43), die Bewegungshaufen kleine Exzentrizitäten auf. Für die untersuchten Sterne ist Strömbergs Forderung einer numerischen Grenze der Sternengeschwindigkeiten erfüllt. *Straßl* (Göttingen).

**Mineur, Henri:** Recherches complémentaires sur les mouvements des étoiles B. *Bull. Astron.*, II. s. **9**, 41—85 (1934).

Die in *Bull. Astron.*, II. s. **8**, 228 begonnenen kinematischen Untersuchungen über die Bewegungen der *B*-Sterne werden mit erweitertem Beobachtungsmaterial fortgeführt. Berücksichtigung der kosmischen Absorption erweist sich als unnötig. Die Mittelwerte der in der Milchstraßenebene liegenden Komponenten *X, Y* der Geschwindigkeitsvektoren *V* werden für 49 Felder (früher 38) ermittelt und durch Polynome 3. Grades in den Ortskoordinaten *x, y* (Beobachter im 0-Punkt) dargestellt. Daraus folgen die Vektorausdrücke  $\Phi = \text{rot } V$  und  $\Psi = \text{div } V$  als Polynome 2. Grades.

Numerisch ist bei  $\Phi$  nur der konstante Term verbürgt; bei  $\Psi$  betragen außerdem die quadratischen (nicht die linearen) Glieder etwa das 2,5fache ihrer mittleren Fehler.  $\Psi$  ist positiv in der nächsten Umgebung der Sonne und nimmt mit Entfernung von der Sonne ab, wird in etwa 200 ps Abstand Null, dann negativ. Für die Oortschen Konstanten ergibt sich:  $l_0 = 329^\circ$ , 1,  $A = +0,019 \pm 0,007$ ,  $B = -0,016 \pm 0,003$ . Der Versuch, die durch die Polynome dargestellten Geschwindigkeiten als Konsequenzen einer reinen Rotation (Winkelgeschwindigkeit nur Funktion des Abstands vom Zentrum) zu deuten, liefert kein entscheidendes Ergebnis. Eine auf die Veränderlichkeit des Ausdrucks  $\Gamma = Yx - Xy$  im untersuchten Gebiet gegründete Untersuchungsmethode führt zu dem Ergebnis, daß der Geschwindigkeitsvektor  $V$  nicht durch eine reine Rotation darstellbar ist. Schließlich nimmt der Verf. eine Zerlegung des Vektors  $V$  in einen wirbelfreien und einen quellenfreien Teil vor; doch bleiben noch immer beträchtliche Abweichungen zwischen den Beobachtungen und der formelmäßigen Darstellung.

Straßl (Göttingen).

## Quantentheorie.

**Pospíšil, Bedřich:** Principe général pour déduire les équations fondamentales de la physique. Čas. mat. fys. 64, 303—310 (1935).

Verf. gibt ein neuartiges Begriffs- und Axiomensystem, aus welchem er die Lagrangeschen, die Maxwellschen und die de Broglieschen und Diracschen Gleichungen entwickelt.

P. Jordan (Rostock).

**Mariani, Jean:** Sur la signification générale de la théorie macroscopique des champs. C. R. Acad. Sci., Paris 200, 2009—2011 (1935).

Bemerkungen über eine gruppentheoretische Deutung der relativistischen Bewegungsgleichungen.

P. Jordan (Rostock).

**Hulme, H. R.:** On the electromagnetic fields due to variable electric charges and the intensities of spectrum lines according to the quantum theory. Proc. Roy. Soc. London A 150, 416—421 (1935).

Schott und Easthope haben in gleichnamigen Arbeiten das bereits 1927 von Klein im Sinne des Korrespondenzprinzips gelöste Problem der Ausstrahlung eines Atoms behandelt. — Verf. benutzt eine etwas modifizierte Definition des elektrischen Momentes eines Atoms und gibt für die Intensität der Ausstrahlung eine Formel, die mit der von Schott und Easthope vollständig äquivalent, jedoch einfacher als diese ist. Der Unterschied zwischen der nach der Formel des Verf. und nach der gewöhnlichen Formel (Dipolmoment) berechneten Intensität ist von der Größenordnung der relativistischen Effekte (und ist daher zu vernachlässigen, Ref.).

V. Fock.

**Gordon, W.:** Eine Anwendung der Integralgleichungen in der Wellenmechanik. (Stockholm, Sitzg. v. 14.—18. VIII. 1934.) 8. Skand. Mat.-Kongr., 249—255 (1935).

Es sei — der einfacheren Schreibweise halber werde ein nur aus einem Massenpunkt bestehendes System betrachtet — mit  $F = F\left(\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}, \dots, x, \dots\right)$  ein beliebiger selbstadjungierter Operator bezeichnet, der ein kontinuierliches Eigenwertspektrum besitzt. Wir interessieren uns für die Wahrscheinlichkeitsamplitude  $\chi(F)$ , durch welche die Wahrscheinlichkeit  $|\chi(F)|^2 dF$  dafür bestimmt ist, daß die Größe  $F$  einen Wert im Intervalle  $F, F + dF$  besitzt, nachdem zuvor ein bestimmter Energiewert  $E$  vorhanden war. Für  $\chi(F)$  gilt dann die Integralgleichung

$$\int \chi(F') \frac{\partial^2 \partial(F, F')}{\partial F \partial F'} dF' = E \chi(F).$$

Dabei bedeutet  $\partial(F, F')$  ein Matrixelement der Energiematrix in einer solchen Matrixdarstellung, in welcher  $F$  eine Diagonalmatrix wird. Beim H-Atom ergibt sich beispielsweise:

$$\frac{p^2}{2m} \chi(p) - \frac{e^2}{h\pi} \iiint \frac{\chi(p') d^3 p'_x d^3 p'_y d^3 p'_z}{(p - p')^2} = E \chi(p).$$

P. Jordan (Rostock).



**Klein, O.:** Ein Rekursionsverfahren zur Lösung der eindimensionalen Wellengleichung der Quantenmechanik. (Stockholm, Sitzg. v. 14.—18. VIII. 1934.) 8. Skand. Mat.-Kongr., 243—248 (1935).

Wenn  $Q = Q(x)$  eine zweireihige Matrix ist, so besitzt das mit einer einzigen Differentialgleichung zweiter Ordnung äquivalente Differentialgleichungssystem  $\frac{d\psi}{dx} = Q\psi$  ( $\psi$  hat also zwei Komponenten  $\psi_1, \psi_2$ ) für den Spezialfall, daß  $Q(x')$  mit  $Q(x'')$  stets vertauschbar ist, die Lösung

$$\psi(x) = e^{\int_{x_0}^x Q(x) dx} \psi(x_0).$$

Der allgemeine Fall wird nun derart behandelt, daß man in einem semikonvergenten Annäherungsverfahren die obige Bemerkung wiederholt verwertet. *P. Jordan.*

**Nikolsky, K.:** On the relativistic quantum mechanics. Proc. Roy. Soc. London A 150, 411—415 (1935).

Verf. betrachtet den Riemannschen Krümmungstensor  $*B_{\nu\sigma}^{\mu}$  und den verjüngten Tensor  $*G_{\mu\nu} = *B_{\mu\nu\alpha}^{\alpha}$ . Aus den Koeffizienten  $\Gamma_{\nu\alpha}^{\mu}$  der Parallelübertragung werden die Matrizen  $\Gamma_{\nu} = |\Gamma_{\nu(\alpha)}^{\mu}|$  und mit deren Hilfe die Differentialoperatoren  $\nabla_{\nu} = \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} + \Gamma_{\nu}$  gebildet. Dann ist die Matrix  $*B_{\nu\sigma} = |*B_{(\mu)\nu\sigma}^{\mu}|$  gleich  $*B_{\nu\sigma} = \nabla_{\nu}\nabla_{\sigma} - \nabla_{\sigma}\nabla_{\nu}$ . So dann führt Verf. die „Einheitsmatrizen“  $e_{\mu\nu}$  (mit dem einzigen von Null verschiedenen Element an der  $\mu\nu$ -ten Stelle) ein und bemerkt, daß die Matrix  $*G = |*G_{\mu\nu}|$  in der Form  $*G = \sum_{\mu\nu} *B_{\mu\nu} e_{\mu\nu}$  geschrieben werden kann. Diese Formel wird mit den Spingliedern in der allgemein-relativistischen Diracschen Wellengleichung zweiter Ordnung verglichen. Zum Schluß bemerkt Verf., daß aus dem Variationsprinzip  $\delta \int \sqrt{\det} |*G| d\tau = 0$  die elektrodynamischen Gleichungen der Eddington-Born-Infeldschen Feldtheorie folgen. *V. Fock (Leningrad).*

**Heitler, W.:** Note on the equilibrium of black-body radiation. Proc. Cambridge Philos. Soc. 31, 242—243 (1935).

Die Anzahl der Paare von positiven und negativen Elektronen im Gleichgewicht mit schwarzer Strahlung wird berechnet. Sie ist bei „niedrigen“ Temperaturen, d. h.  $T \ll mc^2/k = 5 \cdot 10^9$  °C, sehr klein und proportional  $e^{-mc^2/kT}$ . Bei  $T = mc^2/k$  ist etwa 1 Paar pro Kubus der Comptonwellenlänge vorhanden, bei noch höherer Temperatur wächst die Anzahl wie  $T^{3/2}$ . *Bethe (Ithaca, N. Y.).*

**Gamow, G.:** Les noyaux atomiques. Ann. Inst. H. Poincaré 5, 89—114 (1935).

Bericht über den Stand der Kerntheorie im Anfang des Jahres 1934. Allgemeiner Aufbau der Kerne (Rolle der Neutronen, Austauschkräfte). Kerntransformationen, an denen schwere Teilchen teilnehmen (Gamowsche Theorie). Kerntransformationen, an denen leichte Teilchen teilnehmen (Positronen, Probleme des  $\beta$ -Zerfalls). Astrophysikalische Anwendungen (Zustandsgleichung des entarteten Elektronengases). *C. F. v. Weizsäcker (Leipzig).*

● Structure et propriétés des noyaux atomiques. Rapports et discussions du septième conseil de physique tenu à Bruxelles du 22 au 29 octobre 1933 sous les auspices de l'Institut international de physique Solvay. Publiés par la commission administrative de l'Institut. Paris: Gauthier-Villars 1934. XXV, 353 S. Frs. 75.—.

Der etwas verspätet erschienene Band beginnt mit einer sorgfältig zusammengestellten Isotopentabelle. Es folgen experimentelle Berichte: von Cockcroft über die Zertrümmerung der Elemente durch beschleunigte Protonen, von Chadwick über anomale Streuung von  $\alpha$ -Teilchen, Elementumwandlung durch  $\alpha$ -Teilchen und das Neutron, und von F. u. J. Joliot über die durchdringende Strahlung der Atome unter der Wirkung von  $\alpha$ -Strahlen. Diese Berichte und die ausgedehnten Diskussionsbemerkungen sind in vielen Punkten schon veraltet, enthalten aber daneben zahlreiche, auch theoretisch noch wichtige Bemerkungen. Dann berichtet Dirac über

die Theorie des Positrons (die dort versuchte, allen Invarianz- und Endlichkeitsforderungen genügende Formulierung der Theorie ist inzwischen in konsequenterer Form gelungen: P. A. M. Dirac, dies. Zbl. **9**, 137; W. Heisenberg, dies. Zbl. **10**, 41). Die Diskussion enthält u. a. längere Ausführungen von Bohr über die Gültigkeitsgrenzen der korrespondenzmäßigen Beschreibung von Elektronen und Feldern. Gamow berichtet über den Ursprung der  $\gamma$ -Strahlen und die Energieniveaus der Kerne (Ordnung des empirischen Materials über innere Umwandlung von  $\gamma$ -Strahlen, Feinstruktur der  $\alpha$ -Strahlung usw.; Versuch der Konstruktion eines theoretischen Termschemas). Die Diskussion bringt hauptsächlich experimentelle Ergänzungen. Den Schluß bildet der Bericht von Heisenberg: Allgemeine theoretische Betrachtungen über die Kernstruktur (Rolle der Neutronen; Austauschkräfte, mit Ableitung der Massendefekte und Stabilitätsgrenzen aus einem Kraftansatz — vgl. dazu G. C. Wick, dies. Zbl. **9**, 185). Diskussion u. a. über das Problem der  $\beta$ -Strahlung (vgl. E. Fermi, dies. Zbl. **9**, 91).

C. F. v. Weizsäcker (Leipzig).

**Houston, William V.:** A nuclear model. *Physic. Rev.*, II. s. **47**, 942—946 (1935).

Verf. diskutiert ein Kernmodell, bei dem angenommen wird, daß ein Kern aufgebaut ist aus  $\alpha$ -Teilchen, Protonen und Neutronen und daß die zwischen zwei Teilchen wirkende Kraft proportional zum Abstand dieser zwei Teilchen ist. Die Eigenschwingungen und die Energie des Grundzustandes dieses Modells werden berechnet. Bei geeigneter Wahl der auftretenden Konstanten werden einige Hauptzüge der experimentellen Daten über Massendefekte richtig von dem Modell wiedergegeben.

Casimir (Leiden).

**Bethe, H. A.:** Theory of disintegration of nuclei by neutrons. *Physic. Rev.*, II. s. **47**, 747—759 (1935).

Kräfte von einer mit dem Kernradius vergleichbaren Reichweite genügen, um die großen von Fermi u. a. [*Proc. Roy. Soc. A* **146**, 483 (1934)] gefundenen Wirkungsquerschnitte bei Kernzertrümmerung durch langsame Neutronen zu erklären. Der theoretische Wirkungsquerschnitt hat 1. einen Faktor  $1/v$ , der von der Zunahme der Aufenthaltsdauer des Neutrons im Kern bei abnehmender Geschwindigkeit herrührt, 2. einen Faktor  $1/\sin^2\varphi_0$ , wobei  $\varphi_0$  die Phase der Neutroneneigenfunktion am Kernrand ist. Der zweite Faktor hängt vom Verlauf des Kernpotentials empfindlich ab; er läßt sich nicht für einen vorgegebenen Kern voraussagen, aber bei plausiblen Annahmen über den Potentialabfall am Kernrand kann die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Wirkungsquerschnitts vorgegebener Größenordnung bei Annahme gleicher Aprioriwahrscheinlichkeit aller Phasen  $\varphi_0$  berechnet und mit der Häufigkeit seines Vorkommens in der Erfahrung verglichen werden. Die Übereinstimmung mit einem Material von 27 gemessenen Werten ist gut. Die sehr großen Wirkungsquerschnitte bei einigen Elementen sind also auf einen Resonanzeffekt ( $\varphi_0 \sim 0$ ) zurückzuführen. Behandelt werden: 1. elastische Streuung, 2. Einfangung mit  $\gamma$ -Emission, 3. Zertrümmerung mit  $\alpha$ -Emission, 4. Zertrümmerung mit Protonenemission, 5. Kernanregung ohne Einfangung oder Teilchenemission. Der Resonanzfaktor ist allen Prozessen gemeinsam; große Einfangungsquerschnitte sollten daher stets mit großen Streuquerschnitten verknüpft sein.

C. F. v. Weizsäcker (Leipzig).

**Oppenheimer, J. R.:** The disintegration of the deuteron by impact. *Physic. Rev.*, II. s. **47**, 845—846 (1935).

Der Wirkungsquerschnitt für die Zertrümmerung eines Deuterons der Geschwindigkeit  $v$  durch Stoß an einem anderen Kern läßt sich unter den (für  $Ze^2/\hbar v \gg 1$  vereinbaren) Voraussetzungen, daß die minimale Stoßzeit klein sei gegen die reziproken Eigenfrequenzen des Deuterons und daß das Kernfeld innerhalb des Deuterons wenig variere, ableiten aus dem von Bethe und Peierls [*Proc. Roy. Soc. A* **148**, 146 (1935); dies. Zbl. **11**, 43] berechneten Wirkungsquerschnitt für Zertrümmerung durch Licht der Frequenz  $\nu$  und den aus der Theorie des kontinuierlichen Röntgenspektrums bekannten Matrixelementen des Kernfeldes, die zum Energieverlust  $\hbar\nu$  des Deuterons



gehören. Die größten praktisch erreichbaren Ausbeuten müssen zwischen  $10^{-9}$  und  $10^{-6}$  liegen.

*C. F. v. Weizsäcker* (Leipzig).

**Thomas, L. H.:** The interaction between a neutron and a proton and the structure of  $H^3$ . *Physic. Rev.*, II. s. 47, 903—909 (1935).

In der üblichen Weise wird vorausgesetzt, daß für den Massendefekt der Kerne  $H^2$  und  $H^3$  nur die Wechselwirkung zwischen Neutronen und Proton verantwortlich ist, und daß diese Wechselwirkung sich genähert darstellen läßt durch Einführung eines Potentials in die Schrödingergleichung im Konfigurationsraum. Für dies Potential werden nacheinander zwei modellmäßige Annahmen gemacht, nämlich 1.  $V(r) < 0$  für  $r < a$  (Anziehung);  $V(r) = 0$  für  $r \geq a$ , und 2.  $V(r) = 0$  für  $r > 0$ ; Singularität von  $V$  bei  $r = 0$ . In beiden Fällen läßt sich der Massendefekt des  $H^3$  unter der Voraussetzung, daß der von  $H^2$  bekannt ist, abschätzen (was im wesentlichen auf die Abschätzung einer Anzahl von Integralen im Konfigurationsraum hinausläuft). Im ersten Falle ergibt sich ein endlicher Grenzwert, der natürlich mit kleiner werdendem  $a$  anwächst, dagegen nicht im zweiten Falle. Entweder rührt also die Bindungsenergie des  $H^3$  nicht von einer Singularität im Neutron-Proton-Kraftgesetz her, wie man ja auch allgemein annimmt, oder man muß abstoßende Kräfte zwischen Neutron und Neutron einführen.

*S. Flügge* (Leipzig).

**Flügge, S.:** Gibt es ein Neutron der Masse 2? *Z. Physik* 95, 312—318 (1935).

Als Indizien für die Existenz eines aus zwei mit entgegengesetzten Spinrichtungen aneinandergelagerten Neutronen bestehenden „Bineutrons“ als selbständigen Kernbausteins werden angeführt: 1. die Tatsache, daß Kerne mit gerader Protonen- und Neutronenzahl stets den Spin Null haben, 2. die größere Stabilität und Häufigkeit der Isotope mit geraden Neutronenzahlen. (Beide Tatsachen würden freilich auch aus einer Anordnung unabhängiger Einzelneutronen in Zweierschalen, d. h. aus dem Nichtvorhandensein (näherungsweise) entarteter Neutronenzustände im Kern folgen.)

*C. F. v. Weizsäcker* (Leipzig).

**Flügge, S., und A. Krebs:** Kernchemie. *Physik. Z.* 36, 466—480 (1935).

Bericht über Kernbausteine und Kernumwandlungen. Vollständige Tabellen der Kernmomente, der Umwandlungsprozesse und der künstlich radioaktiven Kerne nach dem Stand im März 1935. Diskussion schwer deutbarer Fälle. *C. F. v. Weizsäcker*.

**Bedreag, C. G.:** La place des protons et des neutrons dans la systématique naturelle des éléments. *Bul. fac. ști. Cernăuți* 8, 160—166 (1935).

**Korsunskij, M. I.:** Deviations from the Sommerfeld formula for the  $K$ -levels. *C. R. Acad. Sci. URSS* 2, 114—116 u. engl. Zusammenfassung 116—117 (1935) [Russisch].

Furry und Oppenheimer (vgl. dies. Zbl. 8, 380) haben gezeigt, daß in der Diracschen Theorie des Positrons die vorgetäuschte Verminderung der Ladung um  $1/137$  bei Beschleunigungen  $> mc^3/h$  verschwindet. Da diese Beschleunigung von den Elektronen in der  $K$ -Schale eines Atoms für  $Z > 74$  überschritten wird, sind dort Abweichungen von der Sommerfeldschen Feinstrukturformel zu erwarten in der Größenordnung 1%, die eine Prüfung der Löchertheorie gestatten. *S. Flügge*.

**Thoma, Alfred:** Über die kontinuierliche Absorption bei den Alkalien. *Z. Physik* 94, 621—648 (1935).

**Thoma, Alfred:** Die Matricelemente der Alkalien. *Z. Physik* 95, 539—554 (1935).

Mit dem Hartreeschen Potentialansatz für das auf das äußere Elektron wirkende Kraftfeld werden die Eigenfunktionen der diskreten Zustände numerisch berechnet (nützliche Tabellen!), während für die kontinuierlichen Zustände Wasserstofffunktionen benutzt werden. Damit werden die Matricelemente für die Übergänge aus den tieferen Zuständen in das Kontinuum ausgerechnet und zur Berechnung von Tabellen für die Absorption benutzt.

*F. Hund* (Leipzig).

**Hund, F.:** Description of the binding forces in molecules and crystal lattices on quantum theory. (*Cambridge, 4. X. 1934.*) *Internat. Conf. on Physics* 2, 36—45 u. 50—53 (1935)

**Kalekar, F., and E. Teller: On the theory of the catalysis of the ortho-para transformation by paramagnetic gases.** Proc. Roy. Soc. London A **150**, 520—533 (1935).

Die Umwandlung von Orthozuständen in Parazustände einer zweiatomigen Molekel mit gleichen Kernen wird durch die inhomogenen Magnetfelder in einem paramagnetischen Gas begünstigt. Mit Hilfe einer Störungsrechnung wird die Reaktionsgeschwindigkeit berechnet; sie hängt außer vom Magnetfeld und vom magnetischen Moment des Kernes auch von seinem Drehimpuls ab. Aus der gemessenen Reaktionsgeschwindigkeit bei Wasserstoff und Deuterium wird das Verhältnis der magnetischen Momente von Proton und Deuteron bestimmt.

*F. Hund* (Leipzig).

**Schubin, S., und S. Wonsowsky: Zur Elektronentheorie der Metalle. I.** Physik. Z. Sowjetunion **7**, 292—328 (1935).

Die Verff. erweitern die von Heisenberg zur Behandlung des Ferromagnetismus eingeführte Theorie der Metalle dahin, daß sie auch polare Zustände, d. h. zwei Elektronen am selben Atom, zulassen. — Ein solcher polarer Atomzustand (und ebenso ein Loch) kann durch ein äußeres Feld beschleunigt werden. Die Zahl  $s$  dieser Zustände (im Prinzip aus der Theorie zu berechnen) entspricht etwa der Zahl der Leitungselektronen im Sommerfeld-Blochschschen Modell. Bei gegebenem  $s$  wird der Energiemittelwert für bestimmte Magnetisierung (d. h. Spinkomponente) gleich der Heisenbergschen plus der Coulombenergie der polaren Zustände. Die weitere Behandlung wird nach einer „halbklassischen Methode“ nach dem Vorbild von F. Bloch [Z. Physik **74**, 293 (1932)] versucht. Es ergibt sich je nach dem Wert der verschiedenen auftretenden Austausch- usw. Integrale die Möglichkeit, daß im energetisch tiefsten Zustand  $s$  gleich Null, gleich der halben Atomzahl oder gleich einem Zwischenwert ist. Letzterem entspräche eine nicht ganze Magnetonzahl für den Sättigungsmagnetismus. Man findet ferner die Möglichkeit für einen Isolator (d. h.  $s = 0$ ), dessen Grundzustand ein Kontinuum ist. Es wird noch angedeutet, daß bei gleichzeitigem Vorhandensein von ferromagnetischen (d. h. inneren) und Leitungselektronen sich eine Möglichkeit auch einer magnetischen Kopplung zwischen beiden und auch für eine Beeinflussung der Leitfähigkeit durch die Magnetisierung ergibt. *Nordheim* (Lafayette, Indiana).

**London, F., and H. London: The electromagnetic equations of the supraconductor.** Proc. Roy. Soc. London A **149**, 71—88 (1935).

Nach den bisherigen Annahmen sollten sich die Elektronen in einem Supraleiter reibungslos bewegen; es sollte also die Beschleunigung der Elektronen proportional dem angelegten Feld sein, so daß  $\Lambda \ddot{\mathfrak{J}} = \mathfrak{E}$ , wo  $\Lambda = m/ne^2$  ( $e$  Ladg.,  $m$  Masse des Elektrons,  $n$  Anz. pro  $\text{cm}^3$ ). Diese Beziehung ist nicht direkt experimentell geprüft; es wird daher vorgeschlagen, sie durch die weniger strikte Gleichung  $\text{rot } \Lambda \dot{\mathfrak{J}} = \text{rot } \mathfrak{E}$  zu ersetzen, d. h. der rotationsfreie Teil des elektrischen Feldes wird als unwirksam für die Beschleunigung der Elektronen angenommen. Diese neue Beziehung folgt mit Hilfe der Maxwellgleichungen aus der Relation  $\text{rot } \Lambda \dot{\mathfrak{J}} = -\frac{1}{c} \dot{\mathfrak{S}}$ , welche das Resultat der Experimente von Meissner und Ochsenfeld enthält, daß im Innern eines Supraleiters kein Magnetfeld besteht. Diese letztere Relation wird daher als fundamentale Gleichung für den Supraleiter angenommen. — Die neue Theorie führt zur Annahme von Raumladungen  $\varrho$  im Supraleiter, die mit dem elektrostatischen Potential  $\varphi$  durch  $\Lambda c^2 \varrho = -\varphi$  verknüpft sind. Ebenso sind Strom und Vektorpotential durch  $\Lambda c^2 \mathfrak{J} = -\mathfrak{A}$  verbunden. Zur Energiedichte und zum Poyntingstrom kommen Zusatzterme hinzu. Für die Begrenzung zwischen Supraleiter und normalem Leiter bzw. Isolator werden die üblichen Stetigkeitsbedingungen angenommen. Daraus folgt z. B., daß an der Oberfläche einer supraleitenden Kugel im homogenen Feld Oberflächenladungen entstehen, die sich über eine Schicht von der Dicke  $\frac{1}{\beta} = c\sqrt{\Lambda} \approx 10^{-5} \text{ cm}$  erstrecken. Ist die Kugel in einem gewöhnlichen Leiter eingebettet, in dem ein Strom fließt, so führt sie außerdem einen Oberflächenstrom. — Ein supraleitender Draht von



gegebenem Radius kann bei gegebener Temperatur  $T$  nur einen gewissen Maximalstrom  $I_T$  führen, weil sonst das Magnetfeld an der Drahtoberfläche größer wird als das für  $T$  charakteristische „kritische“ Feld  $H_T$ . Ist  $I > I_T$ , so soll der innere Teil des Drahts supraleitend bleiben, der äußere, in dem das Magnetfeld zu groß würde, nicht-supraleitend sein. Für die Behandlung eines solchen Drahtes wird angenommen, daß an der Grenzfläche zwischen supraleitender und nicht-supraleitender Phase die Normalkomponente der elektrischen Induktion unstetig ist im Gegensatz zu anderen Grenzflächen (?). (Dies hat u. a. zur Folge, daß im supraleitenden Teil ein elektrisches Feld senkrecht zur Grenzfläche zwischen supral. und nicht-supral. Teil entsteht, welches linear mit der Drahtlänge wächst und von der Größenordnung  $10^5 \cdot \text{Länge des Drahts in cm} \cdot \text{Feld parallel zur Drahtachse ist.}$ ) — Zum Schluß wird eine mögliche theoretische Begründung des vorgeschlagenen phänomenologischen Ansatzes angedeutet.

*Bethe (Ithaca, N.Y.).*

**Franz, Walter:** Streuung harter Strahlung durch gebundene Elektronen. Z. Physik 95, 652—668 (1935).

In Weiterführung einer früheren Arbeit [Z. Physik 90, 623 (1934); vgl. dies. Zbl. 9, 420] berechnet Verf. die Streuung harter Strahlung durch gebundene Elektronen unter Zugrundlegung einer W.K.B.-Näherung für die Wellenfunktionen im kontinuierlichen Spektrum (d. h. es wird angenommen, daß diese Funktionen ebene Wellen sind mit langsam veränderlicher Wellenzahl, wobei die Wellenzahl an jeder Stelle aus der Energiegleichung bestimmt wird). Für das Verhältnis des Streukoeffizienten zum Klein-Nishinaschen findet Verf. den Ausdruck  $1 - \frac{1}{2} \alpha^2 + (\alpha^5/\pi) \log(h\nu/mc^2)$ , der sich von einer vom Ref. nach einer im Prinzip weniger zuverlässigen Methode hergeleiteten Formel durch das Vorzeichen des zweiten Gliedes unterscheidet. Die Abweichungen der Gesamtstreuung von der Klein-Nishina-Formel können für schwere Atome bis 1,5% betragen.

*Casimir (Leiden).*

## Geophysik, Meteorologie, Geodäsie.

**Grossmann, W.:** Zur Transformation Gauß-Krügerscher Koordinaten mit der Rechenmaschine. Z. Vermessgswes. 64, 353—368 u. 385—394 (1935).

Verf. gibt eine Reihe von Transformationsformeln in einer Form, die nach Ermittlung gewisser Systemkonstanten zur Rechnung mit Hilfe der Rechenmaschine dient. Behandelt werden: 1. die Transformation von Spezialkoordinaten in ein Landessystem, 2. die Transformation von Landeskoordinaten in ein Spezialsystem, 3. die Transformation von einem Meridianstreifen des Landessystems in einen benachbarten Meridianstreifen. Die dritte Transformation kann man, durch Einführen von Hilfspunkten auf dem Hauptmeridian eines der beiden Meridianstreifen, auf die beiden erstgenannten Transformationen zurückführen; indessen muß wegen der großen Ost-West-Ausdehnung der Meridianstreifen die Genauigkeit wesentlich weiter getrieben werden, als es für die weniger ausgedehnten Spezialsysteme erforderlich ist. Die Grossmannschen Entwicklungen sind so weit durchgeführt, daß sie hinsichtlich der Genauigkeit allen in der Praxis gestellten Anforderungen genügen. *Schmehl.*

**Malkin, N.:** On the determination of the figure of the geoid of the regularized and unregularized earth. Russ. astron. J. 11, 497—503 u. engl. Zusammenfassung 503 (1934) [Russisch].

Verf. macht einige kritische Bemerkungen über die Arbeit von Moisseiev (vgl. dies. Zbl. 9, 287). Es wird derselben vorgeworfen, daß dort der Abstand des Geoids nicht von einem Ellipsoid, sondern von der Sphäre gegeben wird. Dann wird mittels des Satzes von Chasles-Green über die äquivalente Schicht eine der Stokesschen Formel analoge Integralgleichung abgeleitet, in welcher als Referenzfläche ein Rotationsellipsoid von kleiner Abplattung genommen ist. Diese Gleichung ist nur auf

eine regularisierte Erde anwendbar. Weiter wird eine Formel gegeben, bei welcher die äußeren Massen nicht entfernt werden müssen. Sie lautet

$$N_0 = 2n_e + \frac{1}{4\pi} \int \left( 3n_e \frac{g}{g_0} + \frac{\Delta g}{g_0} \right) F(\psi) d\sigma,$$

Hier ist  $n_e$  die durch die äußeren Massen allein erzeugte Erhöhung des Geoids über einer der Sphäre nahen Referenzfläche,  $g_0$  die Normalschwere auf letzterer,  $\Delta g = g' - g_0$  mit  $g'$ , die auf die Geoidfläche nach Prey-Poincaré reduzierte wahre Schwerkraft,  $F(\psi)$  die bekannte Stokessche Funktion,  $\frac{g}{g_0}$  kann durch 1 ersetzt werden. Die Möglichkeit einer praktischen Anwendung dieser Formel wird besprochen. Zum Schluß wird eine allgemeine Integralgleichung angegeben und über ihre Auflösung Aussagen gemacht. *A. Michailov (Moskau).*

**Ballarin, S.: Effetto dell'ellissoidicità della terra nelle riduzioni delle misure di gravità.** Boll. Com. Naz. Ital. Geodes. Geofis., II. s. 5, 81—84 (1935).

Nachweis, daß der Reduktion der Schwerkraft auf das Meeresniveau immer die Annahme einer Kugel zugrunde gelegt werden darf; diesem Nachweis ist ein Beispiel mit ausgesucht ungünstigen Annahmen für die Reduktion angeschlossen.

*Hopfner (Wien).*

**Sezawa, Katsutada, and Kiyoshi Kanai: Decay in the seismic vibrations of a structure by dissipation of their energy into the ground.** Proc. Imp. Acad. Jap. 11, 174—176 (1935).

Die Wirkung von Erdbeben auf Gebäude hängt neben der Art des Baumaterials und der Fundierung des Gebäudes besonders von der Übertragung der seismischen Wellen im Untergrund ab. Die Wirkung der Wellen auf ein starres und ein nachgiebiges Gebäude, die Verrückungen des oberen und unteren Endes des Gebäudes und das logarithmische Dekrement werden abgeleitet.

*Brockamp (Kopenhagen).*

**Pekeris, Chaim L.: The propagation of Rayleigh waves in heterogeneous media.** (Massachusetts Inst. of Technol., Cambridge.) Physics 6, 133—138 (1935).

The author treats the theory of Rayleigh waves on a half space whose elastic constants are continuous functions of the depth. The equations of elastic motion are solved asymptotically for small values of the wave length. The wave velocity is expressed as a power series in the wave length, the coefficients of which are shown to be determined by the values of the elastic constants and their successive derivatives at the surface. The expressions for the first two coefficients in this expansion are given, valid when the  $P$  and  $S$  wave velocities are non-increasing functions of depth. — Results for three special media are then exhibited. In these media Lamé's constants  $\lambda$  and  $\mu$ , and the density, each have the type form  $C \cosh^2(\alpha + \beta z)$ , and the velocity of a bodily wave is independent of depth. The coefficients in the equations of motion are then constants. The special cases (1)  $\mu = \mu_0 \cosh^2 \beta z$ ; (2)  $\mu = \mu_0 \exp 2\beta z$ ; and (3)  $\mu = \mu_0(1 + \beta z)^2$  are considered. Dispersion curves, and curves showing the ratio of the vertical to horizontal amplitude are plotted against wave length. In a subsequent note (Physics 6, 178) the same data are re-plotted against the period, which is directly observable. The results tend to explain (1) the departure of observed ratios of vertical to horizontal displacements from their theoretical values; (2) the existence of an upper limit to periods observed in Rayleigh waves; and (3) the preponderance of waves of two periods (12 and 18 sec).

*L. B. Slichter (Cambridge, Mass.).*

**Nomura, Yūkiti: On Rayleigh waves over the circular cylindrical surface of an elastic body.** Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 17, 151—162 (1935).

This investigation deals with elastic waves of the Rayleigh type propagated in an axial direction on the surface of a cylindrical hole of uniform circular section in an infinite homogeneous solid, and likewise along the surface of a uniform circular cylinder, again in the direction of the axis. [This problem was sketched in outline



but not solved in detail, by K. Sezawa, Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo 3, 8 (1927).] Frequency equations are obtained which, for zero curvature, reduce to the ordinary Rayleigh equation. To the first order in  $1/af$ , where  $a$  is the radius and  $2\pi/f$  the wavelength, these equations give the wave-velocity  $V$  as  $V_0(1 \pm \varepsilon/af)$ , in which  $\varepsilon$  depends on the elastic constants only. The amplitude  $U, W$  of the surface displacement is represented approximately by  $U = U_0(1 \pm \gamma_1/af)$ ;  $W = W_0(1 \pm \gamma_2/af)$ , where  $\gamma_1, \gamma_2$  depend only on the elastic constants. In these formulae, the upper sign refers to a concave surface and the lower sign to a convex one. R. Stoneley (Leeds).

**Godske, C. L.: A simplified treatment of some fluid oscillations.** Astrophys. Norvegica 1, 169—197 (1935).

Ein Teilchen der Masse  $m$ , das längs einer Geraden mit der Frequenz  $\nu$  und der Amplitude  $\xi_0$  schwingt, entsprechend  $\xi = \xi_0 \cos \nu t$ , hat beim Durchgang durch die Ruhelage die kinetische Energie  $m\xi_0^2\nu^2/2$ . Diese ist gleich der potentiellen Energie  $\Phi_0$  zur Zeit des größten Ausschlags.  $m\xi_0^2/2$ , der zeitliche Durchschnitt des Trägheitsmoments des Teilchens, wird mittleres oszillatorisches Trägheitsmoment  $I_0$  genannt. Dann ist  $\nu^2 = \Phi_0/I_0$ . Diese Gleichung wird auf kleine Schwingungen von Flüssigkeiten verallgemeinert und verwendet, um verschiedene Ergebnisse aus dem Bjerkneschen Lehrbuch der Hydrodynamik in vereinfachter Weise herzuleiten. Dabei gestattet dieses Gesetz der Erhaltung der Energie, den Druck aus den Bewegungsgleichungen zu eliminieren.  $\Phi_0$  ist die am System geleistete Arbeit gegen die Schwerkraft oder Zentrifugalkräfte. J. Bartels (Eberswalde).

**Chapman, S.: The Götz inversion of intensity-ratio in zenith-scattered sunlight.** Philos. Trans. Roy. Soc. London A 234, 205—230 (1935).

Der Verf. versucht, den zum Zweck der Ozonforschung gemachten experimentellen Untersuchungen der Himmelhelligkeit im Zenit eine exakte Grundlage zu geben. In bekannter Weise behandelt er die Streuung des Sonnenlichtes in einer ideal-reinen Atmosphäre, der aber Ozon in bestimmter Verteilung beigemischt ist. Er berücksichtigt ausdrücklich nur die primäre Streuung (und sieht überhaupt von der Streuung am Ozon selber ab; das Ozon kommt nur durch seine absorbierende Wirkung zur Geltung). Bezeichnet  $r$  den Erdradius,  $z$  die Zenitdistanz der Sonne,  $\varrho(x)$  und  $\varrho_0(x)$  die Dichte der Luft und des Ozons in einer Höhe  $x$ ,  $\sigma$  den Streukoeffizient der Luft und  $\alpha$  den Absorptionskoeffizient des Ozons, so gilt für die Zenithelligkeit:

$$I_{r,z} = \frac{3\sigma}{16\pi} (1 + \cos^2 z) \int_0^\infty C_y \bar{I}_{r,y,z} \varrho(y) dy,$$

wobei

$$C_y = \exp \left[ - \int_0^y \{ \alpha \varrho_0(x) + \sigma \varrho(x) \} dx \right],$$

$$I_{r,y,z} = I_\infty \exp \left[ - \int_y^\infty \{ \alpha \varrho_0(x) + \sigma \varrho(x) \} \sec \lambda dx \right],$$

$$\sin \lambda = \frac{r+y}{r+x} \sin z.$$

Für das Verhältnis  $J_r = I_{r,z}/\frac{1}{2}(1 + \cos^2 z) I_{r,0}$  folgt:

$$J_r = \int_0^1 \exp \left[ - \int_0^\infty \{ \alpha \varrho_0(x) + \sigma \varrho(x) \} (\sec \lambda - 1) dx \right] dm,$$

wo  $m(y)$  den Bruchteil der oberhalb der Höhe  $y$  liegenden Luftmasse angibt; ebenso  $m_0(y)$  für das Ozon. — Sobald von der Erdkrümmung abgesehen werden kann, für  $r = \infty$ , wird, wenn  $Z \equiv \sec z - 1$ :

$$J_\infty = \int_0^1 e^{-Z(\alpha m_0 + \sigma m)} dm.$$

Diese allgemeinen Ausdrücke, zu deren Diskussion gewisse Hilfsfunktionen, die von Chapman numerisch ausgewertet wurden, verwendet werden, werden nun auf zahlreiche Einzelfälle angewendet. Am einfachsten wird  $m_0 = m^k$  angesetzt; für  $k = \frac{1}{2}$ , 1 und 2 lassen sich die Integrale auswerten. Spezieller sind die Annahmen, nach denen der Ozongehalt auf bestimmte Schichten beschränkt bleibt. Sofern die Erdkrümmung berücksichtigt wird, muß meist mit Annäherungen gerechnet werden. — Zur Diskussion kommt hauptsächlich das Verhältnis  $R = J/J'$  von je 2 Intensitätsmessungen mit verschiedenen Wellenlängen (es han-

delt sich dabei um die Wellenlängen 3110 und 3290). — Die zahlreichen und mannigfachen Resultate sind tabellarisch zusammengefaßt und graphisch dargestellt. Es tritt darin sofort zutage, daß  $R$  durchweg ein Minimum bei größeren Zenitdistanzen aufweist. Dadurch sind die bekannten Beobachtungen von Götz bestätigt. *P. Gruner (Bern).*

**Swann, W. F. G.:** The nature of the cosmic radiation. *Physic. Rev.*, II. s. 47, 575—577 (1935).

Folgt die Intensität einer (notwendigerweise inhomogenen) Korpuskularstrahlung (mit bestimmter Reichweite für bestimmte Energien) beim Durchgang durch die Atmosphäre einem Exponentialgesetz, so wird, wie Verf. zeigt, die Qualität (d. h. Energieverteilung) der Strahlung dabei nicht geändert. Die stärkere Zunahme von Stößen und Showers mit der Höhe als die Primärstrahlung ist dann nach dem Verf. darauf zurückzuführen, daß die erzeugte Sekundärstrahlung annähernd proportional der Energie der Primärteilchen geht, wobei ein Exponentialgesetz für die totale Intensität bei Energieabnahme der Primärstrahlung resultiert. *Nordheim.*

**Mieghem, Jacques van:** Thermodynamique des systèmes non-uniformes en vue des applications à la météorologie. *Norske Vid. Akad., Geofys. Publ.* 10, Nr 14, 1—18 (1935).

Es wird die Thermodynamik der Atmosphäre behandelt vom Gesichtspunkt der nicht gleichförmigen Systeme aus 1. Luftmassentransport und Kontinuitätsgleichung; 2. Stöchiometrische Gleichung in der Meteorologie; 3. Änderung des Zustandes und Zustandsgleichungen; 4. Dynamische Gleichung in der Meteorologie; 5. Dynamischer Energiehaushalt; 6. Elastische Arbeit, hervorgerufen durch die Einheitlichkeit der elementaren Massenteilchen; 7. Beziehungen zwischen Dichte und Reibung; 8. Thermodynamischer Energiehaushalt; 9. Verschiedene Energiehaushalte; 10. Abschätzung der Wärme, die den Luftmassenausgleich während der einzelnen Jahreszeiten bedingt; 11. Das zweite Prinzip der Thermodynamik; 12. Abschätzung der Wärme bei nicht ausgeglichenem Zustand; 13. Fundamentale Hypothesen; 14. Energiebilanz nach Bjerknes; 15. Energiebilanz nach Refsdal; 16. Quasiadiabatische Transformation. *Hänsch (Hannover).*

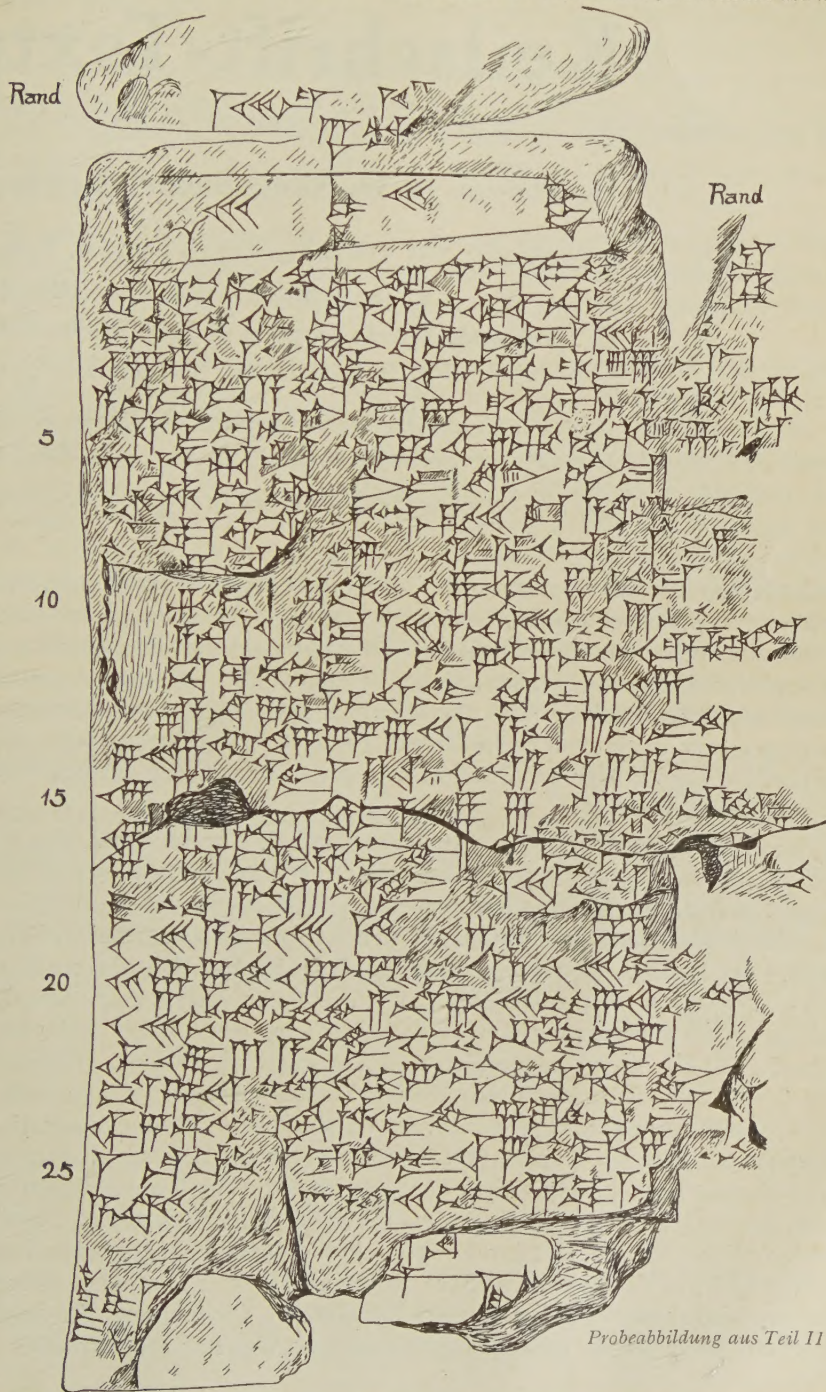
**Steinhauser, Ferdinand:** Ein Beitrag zur Anwendung der beschreibenden Statistik in der Klimatologie. *Meteorol. Z.* 52, 206—213 (1935).

Im ersten Abschnitt stellt Verf. die bekannten statistischen Maßzahlen einer Häufigkeitsverteilung und ihre Bedeutung heraus, also den Durchschnitt (math. Erwartung.), den Zentralwert, die Dezilen und die Quartilen als primitive und die auf den Mittelwert bezogenen Momente höherer Ordnung, Streuung, Schiefe und Exzeß, als höhere statistische Maßzahlen. Anschließend wird auf die Relation zwischen den auf die Gaußsche Normalverteilung bezogenen Charakteristiken Schiefe und Exzeß und den ersten Koeffizienten der Brunsschen  $\Phi$ -Reihe hingewiesen, welche mit der Kenntnis der genannten Maßzahlen auch die Brunssche Entwicklung bis zum vierten Glied erschließt. — Der zweite Abschnitt enthält die Berechnung und meteorologische Deutung der statistischen Charakteristiken, angewendet auf die folgenden Häufigkeitsverteilungen: monatliche Temperaturminima und -maxima in Kremsmünster im Alpenvorland im Zeitraum 1909—1933 und auf dem Sonnblick im Zeitraum 1901—1930. Die erste Station ist dabei für den Temperaturverlauf am Erdboden, die zweite für den in der freien Atmosphäre repräsentativ. Die Fragestellung geht insbesondere dahin, an Hand der statistischen Maßzahlen zu prüfen, ob 1. die Häufigkeitsverteilungen der Minima und der Maxima an derselben Station sich unterscheiden, 2. ob und welche Unterschiede zwischen den Minima bzw. den Maxima in den Häufigkeitsverteilungen beider Stationen bestehen. Die Untersuchung dieser Fragen ergibt eine Reihe von Unterschieden der einzelnen Häufigkeitsverteilungen untereinander, für die sich meteorologische Deutungen angeben lassen. So zeigt sich z. B. die Verspätung des Eintritts der Temperatur-extreme und eine geringere Jahresschwankung der Temperatur in der Höhe selbstverständlich auch im Jahresgang des Durchschnittes, auch die in der Streuung auftretenden Unterschiede lassen sich zwanglos durch den Einfluß der Höhenlage bzw. der Bodennähe erklären. Zum Schluß wird neben dem strengen Maß der Schiefe, in welches jeder Wert der Verteilung mit der Größe seiner Abweichung vom Mittel als Gewicht eingeht, noch das weniger strenge, von Köppen eingeführte Asymmetriemaß, in dem nur das Überwiegen der Anzahl des einen über die des anderen Vorzeichens der Abweichung, nicht aber die Größe zum Ausdruck kommt, einer näheren Untersuchung unterzogen. *H. Philipps (Frankfurt a. M.).*



# Mathematische Keilschrift-Texte

(Ein neuer Band der „Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie u. Physik“)



Probeabbildung aus Teil II



# Mathematische Keilschrift-Texte

(Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Abt. A, Bd. 3)

Von Professor Dr. **O. Neugebauer**, Kopenhagen

I. Textband: XII, 516 Seiten mit 85 Figuren. Format  
17×25,5 cm. 1935. RM 74.—

II. Tafelband: Mit 10 Figuren und 69 Tafeln, davon  
34 in Lichtdruck. Format 26×33 cm.  
IV, 65 Seiten Text (Register, Glossar,  
Nachträge). 1935. RM 54.—

*(Beide Bände werden nur zusammen abgegeben)*

Es handelt sich hier um eine Sammlung aller bisher zugänglichen Texte, wovon der größte Teil bisher unveröffentlicht (viele davon auch in den „Vorlesungen“ des Verfassers noch unberücksichtigt) ist. Die meisten dieser Texte gehören dem Zeitabschnitt von etwa 2000 v. Chr. bis gegen 1200 v. Chr. an, einzelne stammen aber noch aus hellenistischer Zeit, also etwa aus dem Zeitalter von Archimedes. Wir verfügen hier somit über Originaltexte aus fast zwei Jahrtausenden, deren Gesamtumfang weit größer ist als alles, was wir sonst von der antiken Mathematik vor Euklid besitzen.

Teil I des vorliegenden Werkes enthält sieben Kapitel. Kapitel I gibt eine systematische Zusammenstellung aller „Tabellentexte“: Reziprokontabellen, Multiplikationstabellen, Quadrate und Kuben und schließlich allgemeinere Tabellentypen. Dieses Material stammt u. a. aus den Sammlungen von Berlin, Brüssel, Istanbul, Jena, London, New Haven, Paris und Philadelphia. Alle übrigen Kapitel betreffen „eigentlich mathematische Texte“, die der Reihe nach sowohl in Transkription wie Übersetzung samt Kommentar vorgelegt werden, während der Tafelband (Teil II) die Photographien und Autographien enthält. Kapitel II: Texte des Louvre (z. B. ein zu den ältesten Texten gehöriges Prisma sowie eine Tafel aus seleukidischer Zeit, beide u. a. die vollständige Auflösung quadratischer Gleichungen enthaltend). Kapitel III: Texte des British Museum. Ein ebenfalls der ältesten Periode angehöriger Text betrifft Flächeninhalte symmetrischer Figuren, eine andere Gruppe umfaßt auch die schon länger bekannten Texte aus „Cuneiform Texts IX“, ergänzt durch den u. a. kubische Gleichungen behandelnden Text. Kapitel V und VI (Texte aus Straßburg und Berlin) betreffen zahlreiche Texte verschiedensten Themas: Lineare Gleichungen für mehrere Unbekannte, quadratische Gleichungen (sowohl in oft sehr komplizierter geometrischer Ein-

---

**Verlagsbuchhandlung Julius Springer in Berlin**



# Neugebauer, Mathematische Keilschrift-Texte

kleidung wie rein algebraisch, auch inhomogener Fassung), Näherungsformeln usw. Kapitel VII: Yale Babylonian Collection. Eine ganz neue Klasse von Texten, in Serien geordnet und nur Aufgaben enthaltend, fast alle rein algebraischen Charakters (Gleichungen 1. bis 3. Grades und quadratisch lösbare vom 4. und 6. Grad, allgemeines „Verhältnis von  $a$  bezüglich  $b$ “, „negative“ Zahlen usw.). Es handelt sich hier um ein systematisch geordnetes „Lehrbuch“ mit weit über 1000 Beispielen.

Teil II enthält Register und Literaturnachweise, ferner ein umfangreiches Wörterverzeichnis, das die ganze Terminologie dieser Texte zu überblicken gestattet, schließlich Nachträge zu den Kapiteln II (z. B. Zinseszinsrechnung), III und VII, sowie die Tafeln (Photographien und Autographen).

Das Interesse dieses Werkes liegt keineswegs nur auf dem Gebiete der Geschichte der antiken Mathematik. Auch dem Historiker und Philologen bietet es eine Fülle von Material. Hervorgehoben seien nur die zahlreichen Hinweise, die diese Texte auf bautechnische Probleme (Fundamente, Mauern, Dämme, Brücken), auf wirtschaftsgeschichtliche und juristische Fragen (Zinsendienst, Abgaben, Lohnverhältnisse und Arbeiterbedarf, Felderaufteilung), Fragen der Metrologie (genau fixierte Maßrelationen) usw. enthalten. Für den Assyriologen werden viele der sprachlichen Eigentümlichkeiten dieser Textklasse sowie epigraphische Einzelheiten von Interesse sein. Zur Erleichterung des Eindringens in die Terminologie ist ein vollständiges Glossar (sowohl akkadisch wie sumerisch samt Namenverzeichnis) angelegt. Die Literaturhinweise bei den einzelnen Texten bilden, zusammen mit den einschlägigen Angaben in Teil II, eine praktisch vollständige Bibliographie zur babylonischen Mathematik.

---

*Von den „Quellen und Studien“, Abteilung A, erschienen früher:*

1. Band: **Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der schönen Künste in Moskau.** Herausgegeben und kommentiert von **W. W. Struve**. Unter Benutzung einer hieroglyphischen Transkription von B. A. Turajeff. Mit 15 Textfiguren und 10 Tafeln. XII, 198 Seiten. 1930. RM 48.80
2. Band: **The Mishnat ha-Middot**, the first Hebrew Geometry of about 150 C. E. and **The Geometry of Muhammad ibn Mūsā al-Khawārizmī**, the first Arabic Geometry (c. 820), representing the Arabic Version of the Mishnat ha-Middot. A new edition of the Hebrew and Arabic texts with introduction, translation and notes by **Solomon Gandz**. With 14 figures in the text and 4 plates. IX, 96 pages. 1932. RM 24.—

---

**Die Grundlagen der ägyptischen Bruchrechnung.** Von Prof. Dr. **O. Neugebauer**, Kopenhagen. Mit 6 Tafeln. V, 45 Seiten. 1926. RM 7.50\*

---

**Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften.** Von Prof. Dr. **O. Neugebauer**, Kopenhagen.

Erster Band: **Vorgriechische Mathematik.** (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band XLIII.) Mit 61 Figuren. XII, 212 Seiten. 1934.

RM 18.—; gebunden RM 19.60

\* Abzüglich 10% Notnachlaß.

---

**Verlagsbuchhandlung Julius Springer in Berlin**



